ФУНКЦИЈЕ, ГРАФИЦИ – ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ

Примена математике у изучавању закона природе и њено коришћење у техници неби могло бити делотворно без увођења двеју величина: константи и променљивих.

Променљива величина је таква величина која у условима датог задатка може имати различите вредности.

Константна величина је таква величина која у условима датог задатка има једну те исту вредност.

Наравно, једна величина у једном задатку може бити константна, а у другом променљива.

Пример:

Температура T кључања воде у већини физичких задатака је константна величина $(T=100^0)$. Али у задацима где се рачуна са изменама атмосферског притиска, T је променљива.

Пороменљиве величине се означавају са задњим словима латинице: $x, y, z...$, а константе са првим словима латинице: a, b, c...

Каже се да су две променљиве величине: x, y повезане функцио-налном везом, ако свакој вредности једне од њих, одговара једна или више вредности друге.

Обично се узима да је x независна променљива (аргумент), y зависна променљива (функција).

Функционална веза се записује:

$y=f(x)$

Начин записивања функција:

- **Аналитички начин** - то је начин задавања формулом, математичким симболима, који представљају запис познатих операција: слагање , сабирање, дељење итд.

Аналитички начин задавања функције није јединствен.

Чести су случајеви када је немогућ аналитички запис зависности двеју величина.

У пракси, када се зависност двеју величина одређује огледним путем, користи се **таблични и графички** начин задавања функције.

Функција $y=f(x)$ може бити геометријски приказана у облику неке криве, коју називамо **графиком** функције, ако вредност аргумента x и функције y посматрамо као координате тачке на равни.

Функције, задате обрасцем називају се **експлицитне**, ако је дати образац решив по функцији y.

Пример:

$y = 2x + 3$ (права, експлицитни облик).

Функције су **имплицитне** ако је образац (једначина) нерешива по функцији y.

Пример имплицитне функције: $x^2 + y^2 = 25$

Елементарним називамо функције, одређене формулом, која садр-жи коначан број, алгебарских операција над аргументом x, функцијом y и константама.

Елементарне функције се деле на:

Алгебарске и трансцедентне.

ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈА

1. **Област дефинисаности**:

Скуп вредности аргумента x, за које је функција $y = f(x)$ одређена (дефинисана) назива се *област дефинисаности функција*.

Примери :

$y_1 = \sqrt{x}$	;	$Dy = \{x \mid x \geq 0\}$
$y_2 = \sqrt{f(x)}$	;	$Dy_2 = \{x \mid f(x) \geq 0\}$
$y_1 = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	;	$Dy_1 = \{x \mid Q(x) \neq 0\}$
$y_1 = \log_a x$	;	$Dy_1 = \{x \mid x > 0\}$
$y_2 = \log_a f(x)$	;	$Dy_2 = \{x \mid f(x) > 0\}$
$y_1 = arc\sin x$	;	$Dy_1 = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$
$y_2 = arc\sin f(x)$	;	$Dy_2 = \{x \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$
$y_1 = e^x$	;	$Dy_1 = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$
$y = arc\,\mathrm{tg}\, x$	;	$Dy = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$

***Пример*: Одредити област дефинисаности функције** $y = \sqrt{2x - 3}$ **.**

Решење: Поткорена величина мора бити позитивна $2x - 3 \geq 0$, па је

$D_y = [\frac{3}{2}, +\infty)$.

Пример: Одредити дефинисаност функције $y = \arcsin(2x - 3)$.

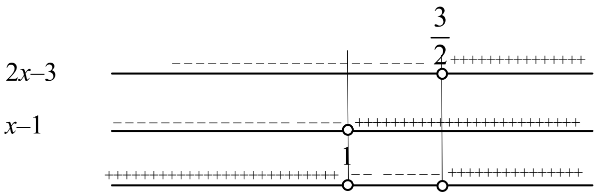
Решење: $|2x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 1 \wedge 2x - 3 \geq -1$, на основу чега:

$1 \leq x \leq 2$, Па је $D_y = [1, 2]$.

***Пример*: Одредити дефинисаност функције** $y=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}}$ **.**

Решење: Поткорена величина мора бити већа или једнака нули:

$\dfrac{2x-3}{x-1}\geq 0$. Најједноставније је једначину решити графички.



$D_y=(-\infty,1)\cup[\frac{3}{2},+\infty)$

***Пример*: Одредити област дефинисаности функције** $y=2^{\frac{x}{x-2}}$ **.**

Решење: Мора бити $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$ јер за $x=2$ није дефинисан именилац експонента. Дакле, $D_y=R\setminus\{2\}$.

***Пример*: Одреди облас дефинисаности** $y=\dfrac{2+\sqrt{x-1}}{\ln(2-x)}$ **.**

Решење: Због корена мора бити $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Због дефинисаности логаритма мора $2-x>0\Leftrightarrow x<2$.

Због имениоца функције мора бити $\ln(2-x)\neq 0\Leftrightarrow 2-x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 1$.

Област дефинисаности полазне функције је пресек дефинисаности њених „делова“, то јест $D_y=(1,\ 2)$.

***Пример*: Одредити област дефинисаности функције**

$y=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1}$

Решење: Због имениоца мора $x-3>0\Leftrightarrow x>3$.

Због другог корена мора бити $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.

Пресек двеју области је област дефинисаности функције:

$D_y=(3,\ +\infty)$.

***Пример*: одредити област дефинисаности функције**

$y=\ln(4-x^2)+\sqrt{36-x^2}$.

Решење: Због дефинисаности логаритма мора бити $4-x^2>0$, тј.

$-2<x<2$.

Због дефинисаности корена мора бити $36-x^2\geq 0$, тј.

$-6 \le x \le 6$.

Дефинисаност функције је пресек дефинисаности „делова“:

$D_y = (-2, 2)$.

***Пример*: Одреди област дефинисаности** $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$**.**

Решење: Мора именилац бити различит од нуле:

$1-\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$D_y = R \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\}$.

За вежбу: Одредити област дефинисаности функција:

$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$	$y = \dfrac{x}{\sqrt{2 + x - x^2}}$	$y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x - 4}{6 - x - x^2}}$
$y = \sqrt[3]{1 - x^3}$	$y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-7}}$	$y = \sqrt[5]{\dfrac{2x+1}{x^2 - 5x}}$
$y = \ln(x-2)$	$y = \dfrac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 49}$	$y = \ln \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 8}$
$y = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$	$y = \ln(3^x - 3^{-x})$	$y = \sqrt{\arcsin(\ln x)}$
$y = \ln(1 - \lvert x \rvert)$	$y = \ln(\sin x - \cos x)$	$y = \sqrt{\sin(\cos(x))}$

2. **Инверзна функција**:

Ако у функционалној зависности заменимо улоге x и y добија се зависност која је инверзна почетној.

Да би постојала инверзна функција функцији $y = f(x)$, мора $f(x)$ бити бијекција.

***Пример*: Одреди инверзну функцију за** $y = x^3$

Решимо једначину по x: $x = \sqrt[3]{y}$, променимо места променљивим $y = \sqrt[3]{x}$. Добијена функција је инверзна почетној $y = x^3$.

***Пример*: Одредити инверзну функцију функцији** $y = \ln(x+3)$**.**

Решимо једначину по x; $e^y = x + 3 \Leftrightarrow x = e^y - 3$. Заменимо места променљивим: $y = e^x - 3$

Добијена функција је инверзна почетној.

Графици узајамно инверзних функција су симетрични у односу на симетралу првог и трећег квадранта (права $y = x$).

***Пример*: Одредити инверзну функцију за** $y = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$

Решење: Функција је дефинисана $D_y = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Решимо функционалну једначину по x:

$e^y = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow e^y(x+1) = x - 1 \Rightarrow x(e^y - 1) = -1 - e^y \Rightarrow x = \dfrac{e^y + 1}{1 - e^y}$, па је

$y^{-1}(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

***Пример*: Дата је функционална једначина** $f(x-4) = \dfrac{x-7}{x-2}$**.**

Одредити $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

Решење: Нека је $x - 4 = t \Rightarrow x = t + 4$, па је $f(t) = \dfrac{t-3}{t+2}$, односно:

$f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}, x \neq -2$. Решимо једначину по x:

$f(x)(x+2) = x - 3 \Rightarrow x(f(x) - 1) = -3 - 2f(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-3-2x}{x-1},\ x \neq 1$

За вежбу:

1. Одредити $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ ако је

$$f(\frac{3x-1}{x})=2x\,,\quad f(1+\frac{1}{x})=x^2-1\,,\qquad f(\frac{3x-1}{x+3})=x-3,\ x\neq -3$$

2. Одредити инверзне функције и скицирати графике:

$$y=x^3 \qquad y=1+\frac{1}{x} \qquad y=2^{-x} \qquad y=x^4,\ x<0$$

$$y=\sqrt{1-x^2}\,,\ 0\leq x\leq 1 \qquad y=\sin x \qquad y=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1},\ x>0$$

$$y=\begin{cases} x,\ -\infty<x<1 \\ x^2,\ 1\leq x\leq 4 \\ 2^x, 4<x<+\infty \end{cases}$$

3. Да ли следеће функције имају инверзну функцију

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\ x\neq -\frac{d}{c} \qquad y=\frac{\sin x+5}{\sin x-3} \qquad y=\frac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$$

4. Показати да су функције

$y=x^2-x+1$ за $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ и

$y=\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}$ за $x\in(\frac{3}{4},+\infty)$ међусобно инверзне функције.

3. **Парност, непарност**

Функција $y = f(x)$ је парна ако важи:

$y(-x) = y(x)$

Геометријски, то значи да је график парне функције осносиметричан у односу на y-осу.

Функција $y = f(x)$ је непарна ако важи :

$y(-x) = -y(x)$

Геометријски, то значи да је график непарне функције централно-симетричан у односу на координатни почетак.

***Пример*: Испитати парнност следећих функција:**

$y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ $\quad$ $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ $\quad$ $y = \dfrac{x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 1}$

$y = \dfrac{3x^2 - 7}{x^3 - 2x + 5}$ $\quad$ $y = \ln(x^2 - 1)$ $\quad$ $y = \arcsin\dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Решење:

$y = \dfrac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow y(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{1}{x^2 - 1} = y(x)$, парна функција.

$y = \dfrac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow y(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1}$, непарна функција

$y = \dfrac{x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 1}$. Бројилац је непарна, а именилац парна функција, па ће количник бити непарна функција.

$y = \dfrac{3x^2 - 7}{x^3 - 2x + 5}$. Бројилац је непарна функција, а именилац ни парна ни непарна функција, па ће количник бити ни парна ни непарна функција.

$y = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow y(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) = y(x)$ – парна ф-ја.

$y = \arcsin\dfrac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow y(-x) = \arcsin\dfrac{-2x}{(-x)^2 + 1} = -\arcsin\dfrac{2x}{x^2 + 1} = -y(x)$

За вежбу:

Одредити парност следећих функција:

$y = x|x|$ $\quad$ $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$ $\quad$ $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ $\quad$ $y = \sin x + \cos x$ $\quad$ $y = x^2 - 3\cos x$.

Периодичност

За функцију $y = f(x)$ кажемо да има период T ако важи :

$f(x+T)=f(x)$

То значи да све битне особине функције $y=f(x)$ довољно испитати на основном периоду.

Периодичност функција је везана за тригонометријске функције.

За функције $y=\sin x$ и $y=\cos x$ основни период је $T=2\pi$.

За функције $y=\sin bx$ и $y=\cos bx$ основни период је $T=\dfrac{2\pi}{b}$.

За функције $y=tgx$ и $y=ctgx$ основни период је $T=\pi$.

За функције $y=tgbx$ и $y=ctgbx$ основни период је $T=\dfrac{\pi}{b}$.

Сложенији изрази у којима су тригонометријске функције се погодним трансформацијама своде на претходне случајеве.

***Пример*: Одредит периоде следећих функција:**

$y=\sin 4x$ $\qquad$ $y=8+\sin 2x$ $\qquad$ $y=\sin(2x-3)$

Решење:

У првом случају је $b=4\Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

У другом случају је $b=2\Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

У трећем случају запишимо функцију $y=\sin(2x-3)=\sin(2(x-\dfrac{3}{2}))$, па је $b=2$ и график је померен у десно за $\dfrac{3}{2}$, $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

***Пример*: Одредити период функција:**

а) $y=\sin x\cos x$ $\qquad$ б) $y=\sin^2 x$ $\qquad$ в) $y=1+\cos^2 4x$

Решење:

а) Како је $\sin 2x=2\sin x\cos x\Rightarrow y=\dfrac{\sin 2x}{2}\Rightarrow b=2$, па је $T=\pi$

б) Како је $\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\Rightarrow y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\Rightarrow b=2$, па је $T=\pi$.

в) Као претходни пример, период је $T=\dfrac{\pi}{8}$

(проверити).

Нула функције

Вредност x за које је $y=0$ је нула функције. Ту график функције пресеца x-осу.

* У неким случајима нула функције налази се једноставним решавањем је $f(x)=0$, а некад не.

У случајевима када нисмо у стању да решимо једначину $f(x)=0$ принуђени смо да докажемо да такво решење постоји користећи теорему.

Теорема: Ако функција на задатом интервалу $[a,b]$ монотоно расте (опада) и у крајевима интервала има различите предзнаке ($f(a)\cdot f(b)<0$) тада постоји тачка $c\in[a,b]$ тако да је $f(c)=0$.

Пример:

$f(x)=e^{x}+x$

$f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}+x=0 \Leftrightarrow e^{x}=-x \Leftrightarrow$

(не можемо даље елементарним операцијама)

Посматрајмо понашање функције на $[-1,0]$.

$f(-1)=\dfrac{1}{e}-1=\dfrac{1-e}{e}<0$, $f(0)=1+0=1>0$.

$f'(x)=e^{x}+1>0$ функција на $[-1,0]$ расте.

Постоји тачка $C\in[-1,0]$ тако да је $f(c)=0$

У задатку смо користили диференцијални рачун да бисмо доказали монотоност функције, јер је једноставније и брже рачунање.

Непрекидност и асимптоте

Дефиниција: Функција има граничну вредност у тачки x_0 и пишемо

$\lim\limits_{x\to x0} f(x)=b$ ако важи:

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$.

У околини тачке x_0 ако су лева и десна гранична вредност једнаке кажемо да је функција непрекидна у тачки x_0.

$\lim\limits_{x\to x0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to x0^{-}} f(x)=b$.

Граничне вредности функција се често јављају као неодређени изрази, па наводимо без доказа неке од „табличних лимеса“ који се често у употреби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k}-1}{x}=k$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{b-1}+\ldots+b_1 x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & m=n\\ \infty, & n>m\\ 0, & n<m\end{cases}$$

У раду са бесконачностима и нулом има смисла без неког посебног заснивања увести следеће:

Одређености	**Неодређености**
$\infty+\infty=\infty$	$\infty-\infty$?
$\infty\cdot\infty=\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$?
$x\cdot 0=0$	$\infty\cdot 0$?
$1^{k}=1$	1^{∞} ?
$\dfrac{1}{0}=\infty$	$\dfrac{0}{0}$?
$\dfrac{1}{\infty}=0$	∞^{0} ?

Све неодређености треба погодним рачуном превести на одређености.

***Пример*: Израчунати граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$ в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+8x+16}$.

Решење:

Како је у свим случајевима неодређеност облика $\dfrac{0}{0}$, потребно је бро-јилац и именилац погодно трансформисати да се избегне појављивање те неодређености. Растављањем на чиниоце добијамо:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x-4}=\dfrac{2}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=0$.

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+8x+16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4}{x-4}=\dfrac{8}{0}=\infty$

***Пример*: Израчунати граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-3x}}{x}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x+23}-3}$.

Решење:

Како је у свим случајевима неодређеност облика $\dfrac{0}{0}$, потребно је сада рационалисати именилац или бројилац и избегнути неодређеност:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$$

б), в) На исти начин као претходни пример.

г) Допунити до разлике кубова $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)}=\frac{2}{3}\,.$$

***Пример*: Израчунати граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{2x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{2x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2}{2x^4+1}$

Решење:

Како је у свим случајевима неодређеност облика $\dfrac{\infty}{\infty}$, потребно је бројилац и именилац поделити највећим степеном.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(2+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{2x+1}$ бројилац је већег степена па израз тежи ка ∞ .

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2}{2x^4+1}$ именилац је већег степена па израз тежи ка 0.

За вежбу: Проверити да је

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x+6}}{\sqrt[3]{8x^3+12x^2-56}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+3}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4}}=1.$$

***Пример*: Израчунати граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+1}-x)$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

Решење: Сваки од примера је облика $\infty-\infty$. Изразе треба написати у облику $\frac{\infty}{\infty}$ рационалисањем и свести рад на претходни задатак.

а)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$$

б, в, г) се раде на исти начин.

У наредним примерима ћемо показати како и када треба користити „табличне лимесе“.

***Пример*: Одредити граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 3x}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{x}$

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{tg4x}$.

Решење: Користићемо „таблични лимес“ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{5}{5}=5\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot1=5$.

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{3}{3}}=\frac{2}{3\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3\cdot1}=\frac{2}{3}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x\cos 5x}\cdot\frac{5}{5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{5}{\cos 5x}=5$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{4}$

д) На исти начин као и у претходним задацима.

***Пример*: Одредити граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(3x-9)}{9x-27}$.

Решење: Мада на први поглед није препознатљиво коришћење табличног лимеса, погодним трансформацијама се може довести до израза $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

а) Како је $\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$, добијамо израз:

$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\Rightarrow 1-\cos 2x=2\sin^2 x$, па је:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=2.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}$

Бројилац је $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ (претходни пример) а именилац је израз који се добија из двоструког угла за синус ($\sin 2x=2\sin x\cos x$), па је:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\sin x}=2\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ (Као у претходном примеру)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$. Потребно је прво рационалисати бројилац.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(3x-9)}{9x-27}$ Задатак је „мало померен“, па није одмах видљиво коришћење табличног лимеса $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, јер $x\to 3$, а не 0. Зато уводимо смену $x-3=t,\ x\to 3\Rightarrow t\to 0$, па је

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(3x-9)}{9x-27}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{9t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

На исти начин се решавају сложенији задаци:

За вежбу:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)tgx$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{4x}+\dfrac{x^2-x}{x}\right)$.

***Пример*: Одредити граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2}{x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{3x}}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^{\frac{2}{3}x}$ ђ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+1}$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+2x^2+1}{2x^3+x^2+2x+1}\right)^{x}$.

Решење: Користићемо табличне лимесе:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{3x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right)^{\frac{2}{3x}\cdot\frac{5x}{1}}=e^{\frac{10}{3}}.$$

г)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3-2x+1}{2x-1}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{4}{2x-1}x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x}{2x-1}}=e^{\frac{4}{2}}=e^{2}$$

На исти начин се раде и остали примери додајући и одузимајући 1 да би се добио таблични лимес.

Примедба: У каснијем раду, када се буде користило Лопиталово правило овакве лимесе је могуће једноставније рачунати. Пре тога функција се може погодно изразити:

$$f(x)=e^{\ln f(x)}$$

За вежбу:

Израчунати следеће граничне вредности функције:

а) $\lim\limits_{x\to o}\left(1+x^2\right)^{ctg^2 x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(tgx\right)^{tg\,2x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^{\sqrt{x}}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$ ђ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{ctg\pi x}$.

***Пример*: Одредити граничне вредности функција:**

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$.

Решење:

Користићемо табличне лимесе $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}\cdot\dfrac{2}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}\cdot\dfrac{2}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Важно: У неким сложенијим задацима потребно је користити више операција и прилагођавања функције.

***Пример*: Одредити граничне вредности функције $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.**

Решење: Потребно је бројиоцу функције додати и одузети 1 да би се добила два лимеса.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Први лимес је таблични и његова вредност је 1, а други се може свести на таблични лимес облика $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, па је:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Израчунавање граничних вредности функција има своју примену у цртању графика функција.

Вертикална асимптота

Уколико функција није дефинисана у некој тачки $x=x_0$, онда је права $x=x_0$ вертикална асимптота ако важи:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$$

Хоризонтална асимптота

Уколико је функција дефинисана на интервалу $(-\infty,+\infty)$ и постоји $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, онда за праву $y=a$ кажемо да је хоризонтална асимптота.

- *Коса асимптота*

Коса асимптота је права $y=kx+n$, где се k и n одређују на следећи начин:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Примедба 1: Очигледно је да ако функција има хоризонталну асимптоту нема косу.

Примедба 2: У случајевима да је функција задата имплицитно $F(x,y)=0$, онда косу асимптоту тражимо на други начин.

Ако права $y=kx+n$ асимптота криве $F(x,y)=0$ степена n онда она има две бесконачно далеке тачке са том кривом. Оперативно, то значи да се приликом решавања система:

$F(x,y)=0$, $y=kx+n$, морају анулирати коефицијенти x^p и x^{p-1}

***Пример*: Одредити асимптоту функције** $(x+y+1)^2 = x^2+1$

Решавамо систем

$$\begin{aligned}&(x+y+1)^2 = x^2+1\\ &y = kx+n\end{aligned}$$ методом замене добијамо

$$(k^2+2k)x^2+(2n+2+2kn+2k)x+(n^2+2l)=0$$

Пошто је крива степена 2, анулирамо коефицијенте уз, x^2 и x:

$$k^2+2k=0 \vee (2n+2+2kn+2k)=0$$

$$(k_1=0 \vee k_2=-2) \wedge l_1=-1; l_2=1$$

Па су асимптоте криве:

$y=0x-1$ хоризонтална асимптота

$y=-2x-1$ коса асимптота

***Пример* 2: Одредити асимптоту криве**

$$x^3+y^3=3axy$$

$$y=kx+n$$

$$x^3+(kx+n)^3=3ax(kx+n)$$

После сређивања добијамо

$$(1+k^3)x^3+3k(kn+a)x^2+3n(kn-a)x+n^3=0$$

Пошто је једначина криве трећег степена $(p=3)$, то ћемо анулирати коефицијенте уз x^3 и x^2.

$1+k^3=0 \Rightarrow k=-1$ заменом у другу

$$3k(kn-a)=0$$

$$3(-1(-n-a))=0 \Rightarrow n=-a$$

Асимптота криве је $y=-x-a$

Истраживање екстремних вредности, као и конвексности и превојних тачака функција је сложенији поступак и захтева познавање диференцијалног рачуна

Елементарне функције

Линеарна функција:

*) $y = kx + n$ (експлицитни облик)

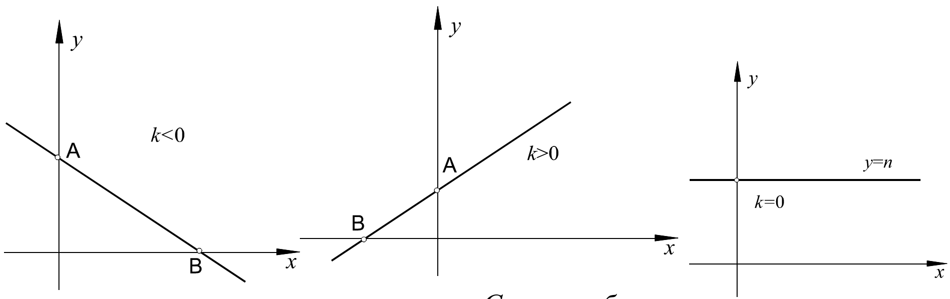
**) $ax + by + c = 0$ (имплицитни облик)

***) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ (сегментни облик)

График линеарне функције је права. Довољно је посматрати (*), јер се елементарним трансформацијама може прећи на остале облике.

Ако је $k > 0$ функција монотоно расте, ако је $k < 0$ монотоно опада, за $k = 0$ функција је константна и њен график је паралелан са x-осом.

Тачке пресека са осама су $A(0,n)$, $B(-\frac{k}{n},0)$. Ако је $n = 0$ онда се линеарна функција своди на директну пропорционалност $(y = kx)$.



Слика а, б и в.

График функције $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

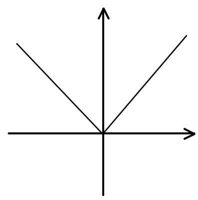
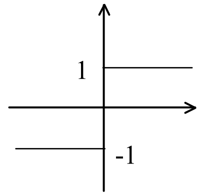
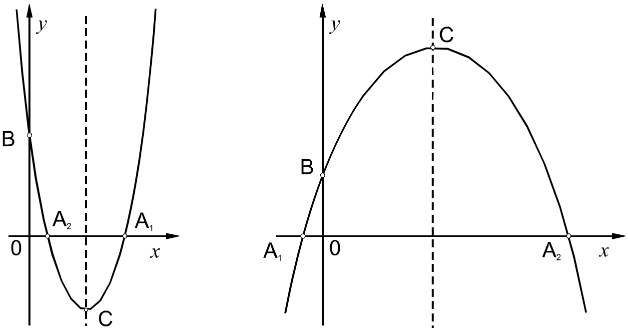


График функције $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



Квадратна функција $y = ax^2 + bx + c$

График квадратне функције је парабола, са вертикалном осом симетрије $x=-\dfrac{b}{2a}$.



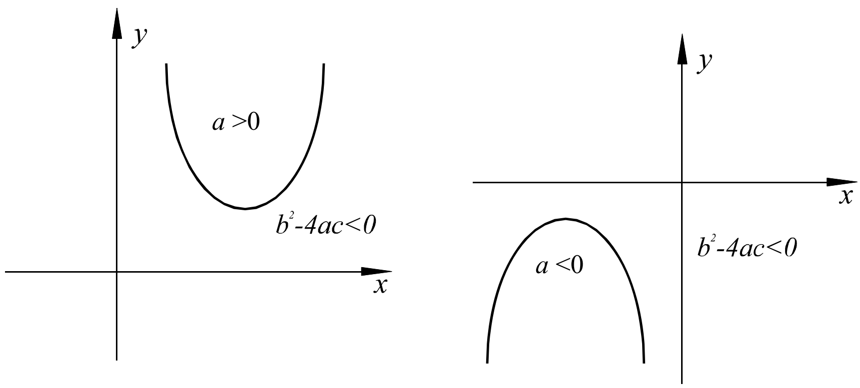
а) $a>0$ б) $a<0$

За $a>0$, квадратна функција достиже минималну вредност у тачки $C\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{2a}\right)$, а за $a<0$ функција има максимум у тачки C.

Тачка C је теме параболе.

Пресек графика са x-осом су решења квадратне једначине $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, уколико је $b^2-4ac\geq 0$.

Ако је $b^2-4ac<0$ график не сече x-осу.



Кубна функција: $y=ax^3+bx^2+cx+d$

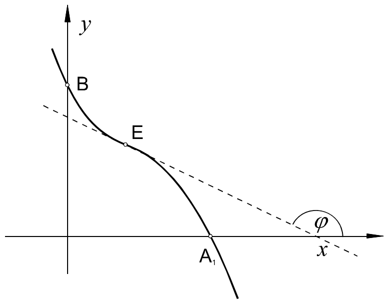
График је кубна функција.

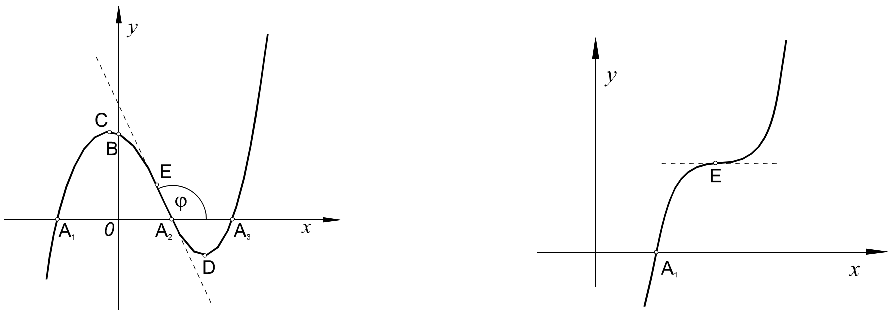
Ток функције зависи од предзнака a и $\Delta=3ac-b^2$.

Ако је $\Delta \geq a$, функција има један максимум и један минимум (сл. ц); за $a>0$ она расте од $-\infty$ до максимума, затим опада од минимума, расте до максимума и поново опада до $-\infty$.

Пресеке са осом Ox одређују реални корени једначине $y=0$. Корен може бити један, може их бити два (у том случају је у једној тачки додир) или три: A_1, A_2 и A_3.

Пресеци са осом *y* су $B(O,d)$.





Слика б и в

Екстреми *C*, *D*: $\left(-\frac{b\pm\sqrt{-\Delta}}{3a}, d+\frac{2b^3-9abc\mp(6ac-ab^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$

Тачка превоја јесте центар симетрије криве.

Полином *n*-тог степена

$y=a_0x^n+a_1x^{n+1}+...+a_{n-1}x+a_n$.

График је крива *n*-тог степена, параболичног типа.

а) *n* непаран, *y* се непрекидно мења за $a_0>0$ од $-\infty$ до $+\infty$.

За $a_0<0$ од $+\infty$ до $-\infty$.

Крива може сећи осу *x* (или је додирује) од 1 до *n* пута.

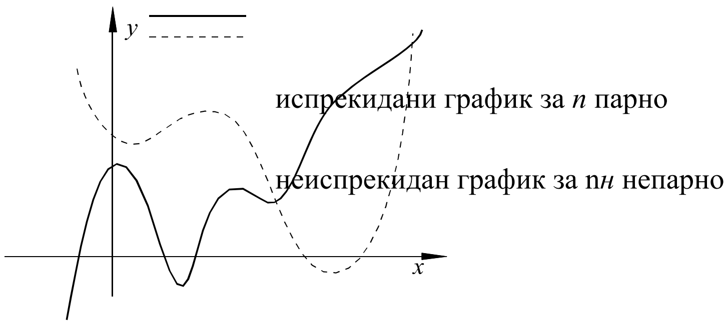
Екстремних вредности ових функција или уопште нема или их има паран број (од 2 до n-1), максимуми и минимуми међусобно се смењују; тачака превоја има непаран број (од 1 до n-2).

б) n паран, y се непрекидно мења за $a_0 > 0$, од $+\infty$ до $+\infty$.

Осу x или уопште не сече, или је сече (или додирује) од 1 до n пута. Функција има непаран број екстремних вредности (од 1 до n-1).

Максимуми и минимуми се међусобно смењују.

Тачака превоја има паран број (од 0 до n-2).



Асимптоте и прекида такве криве немају.

За цртање графика препоручује се да се нађу најпре екстремне вредности и тачке превоја (а такође и вредност извода у тим тачкама).

Уцртати те тачке и у њима тангенте на криву, а затим још нацртати непрекидну глатку криву.

Степена функција: $y = ax^n$ **(n=цео број>1)**

График је парабола n-тог реда.

1. $a=1$ крива $y = x^n$ пролази кроз тачке O(0,0) и A(1,1), и додирује осу x у координатном почетку.

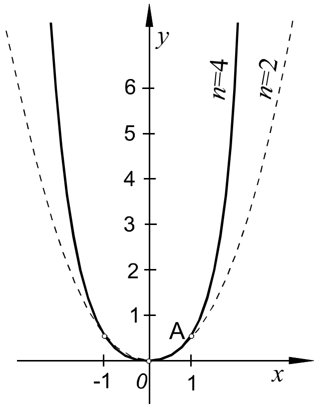
Ако је n паран, крива је симетрична у односу на осу y и има минимум у координатном почетку тада је крива симетрична у односу на y-осу.

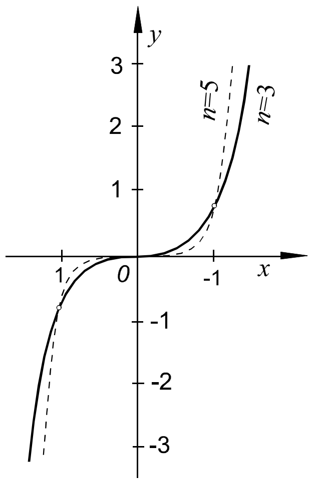
За n непаран симетричан у односу на координатни почетак, који је тачка превоја. Асимптота нема.

2. Општи случај.

Криву $y = ax^n$ добијамо из криве $y = x^n$ са $|a|$- струким растезањем у смеру осе y.

Ако је $a < 0$ график је слика у огледалу криве $y = |a| x^n$ са обзиром на осу x.





РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

Обрнута пропорционалност: $y = \dfrac{a}{x}$

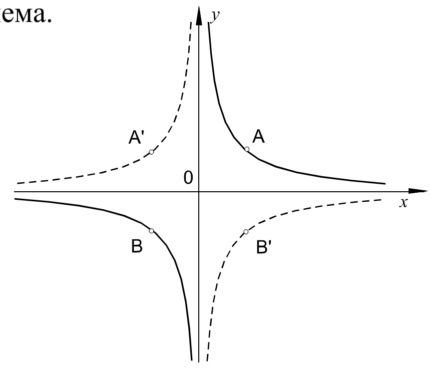
График је равнострана хипербола којој су асимптоте координатне осе. Прекидна је за $x = 0$ $(y = \pm\infty)$.

Ако је $a > 0$, функција опада од 0 до $-\infty$ и од $+\infty$ до 0 (пуна крива у 1. и 3. квадранту);

Ако је $a < 0$, функција расте од 0 до $+\infty$ и од $-\infty$ до 0 (испрекидана крива у 2. и 4. квадранту).

Темена хиперболе A, B $(\pm\sqrt{|a|}, \sqrt{\pm|a|})$; предзнаци су исти при и супротни при $a > 0$ и супротни при $a < 0$.

Екстремних вредности нема.



Разломљена линеарна функција: $y=\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$ **.**

График је равнострана хипербола са асимптотама које су паралелне с координатним осама.

Средиште је $C\left(-\dfrac{b_2}{a_2},\dfrac{a_1}{a_2}\right)$.

Параметар који одговара a у једначини обрнуте пропорционалности јесте $-\dfrac{D}{a_2^2}$, где је $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Темена хиперболе су A, B $\left(-\dfrac{b_2\pm\sqrt{|D|}}{a_2},\dfrac{a_1\pm\sqrt{|D|}}{a_1}\right)$.

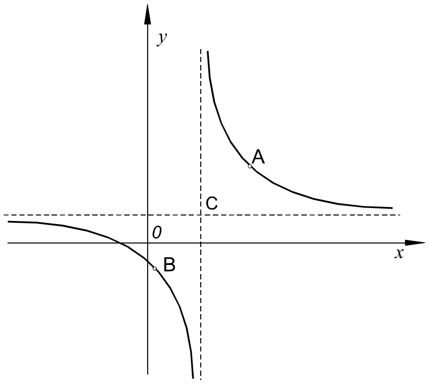
Предзнаци су исти за $D<0$ и различити за $D>0$.

Прекид функције је код $x=-\dfrac{b_2}{a_2}$.

Ако је $D<0$, онда функција опада од $\dfrac{a_1}{a_2}$ до $-\infty$ и од $+\infty$ до $\dfrac{a_1}{a_2}$;

Ако је $D>0$, функција расте од $\dfrac{a_1}{a_2}$ до $+\infty$ и од $-\infty$ до $\dfrac{a_1}{a_2}$.

Екстрема нема.



Степен: $y=\dfrac{a}{x^n}$ **(*n* је цео позитиван број)**

График је крива хиперболичног типа.

Асимптоте су координатне осе.

Прекид код $x=0$.

Ако је $a>0$, функција за паран *n* расте од 0 до $+\infty$ и пада од $+\infty$ до 0, при чему је стално позитивна, а за непаран *n* пада од 0 до $-\infty$ и од $+\infty$ до 0.

Ако је $a<0$, функција за непаран n пада од 0 до $-\infty$ и расте од $-\infty$ до 0, при чему је стално негативна.

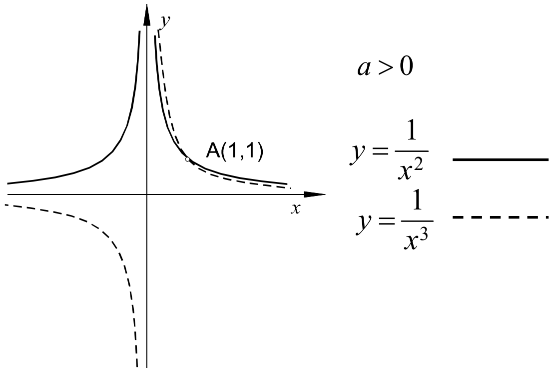
За непаран n расте од 0 до $+\infty$ и од $-\infty$ до 0.

Екстрема нема.

Крива се асимптотички приближава оси x брже, а оси y спорије, што је већи n.

За паран n крива је симетрична с обзиром на осу y, а за непаран n у односу на координатни почетак.

На слици приказана су два случаја: $n=2$ и $n=3$.



Ирационалне функције

Квадратни корен линеарног бинома: $y=\pm\sqrt{ax+b}$

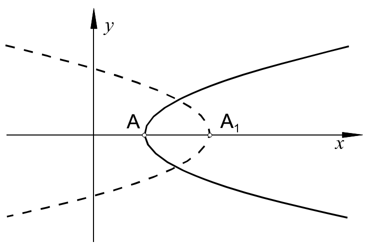
График је парабола, њена оса је оса x.

Теме: $A\left(-\frac{b}{a},0\right)$, параметар $p=\frac{a}{2}$.

Област дефинисаности и ток функције су зависе од предзнака a.

Функција је двозначна.

Екстрема нема.



Квадратни корен квадратног тринома: $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$

График је елипса за $a < 0$ и хипербола за $a > 0$.

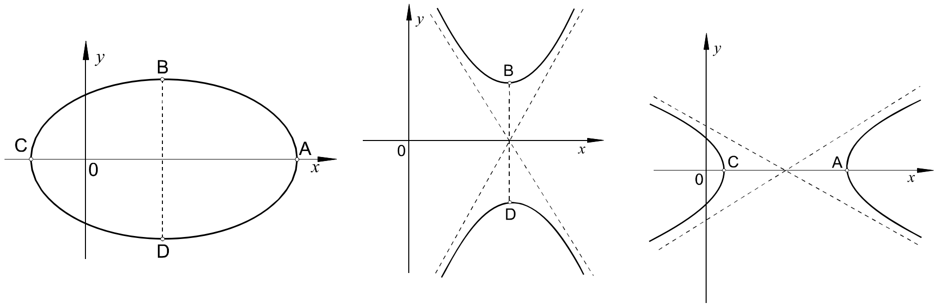
Једна оса је оса *x*, а друга права $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Темена су $A, C\left(-\dfrac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}, 0\right)$ и $B, D\left(-\dfrac{b}{2a}, \pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a}}\right)$, $\Delta = 4ac - b^2$.

Област дефинисаности и ток функције зависе о предзнака *a* и Δ.

Функција је двозначна, има екстрем ако су Δ и *a* истог предзнака (тачке *B* и *D*).

При $a < 0$ и $\Delta > 0$ функција прима само имагинарне вредности, крива не постоји.

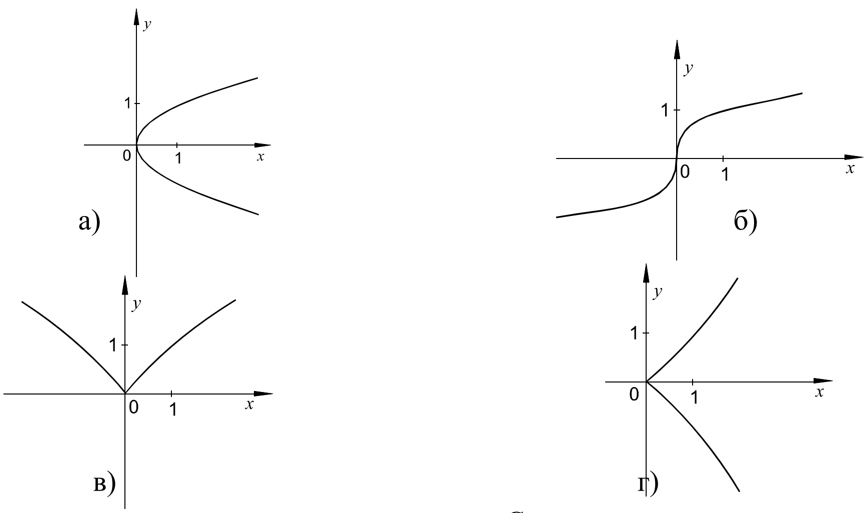


а) $a < 0; \Delta < 0$ б) $a > 0; \Delta > 0$ в) $a > 0; \Delta < 0$

Степена функција: $y = ax^k = ax^{\pm m/n}$

(*m* и *m* су цели позитивни прости бројеви).

Размотрен је случај $a = 1$ (при $a \neq 1$ крива је у односу на $y = x^k$ растегнута у смеру *y*-осе $|a|$ пута и за негативан *a* симетрична у односу на *x*-осу).



Слика

1) $k>0$**,** $y=x^{m/n}$**.**

График (слика) пролази кроз тачке (0,0) и (1,1).

За $k>1$ додирује (у координатном почетку) осу *x* (слика д), за $k<1$ додирује (у координатном почетку) осу *y* (сл а,б,в).

За паран *n* крива је симетрична с обзиром на осу *x* (функција је двозначна).

За паран *m* је симетрична с обзиром на осу *y* (сл. в), за непаран *m* и *n* је симетрична с обзиром на координатни почетак (сл. б).

С тим у вези крива може имати у координатном почетку теме, тачку превоја или шиљак; асимптота нема.

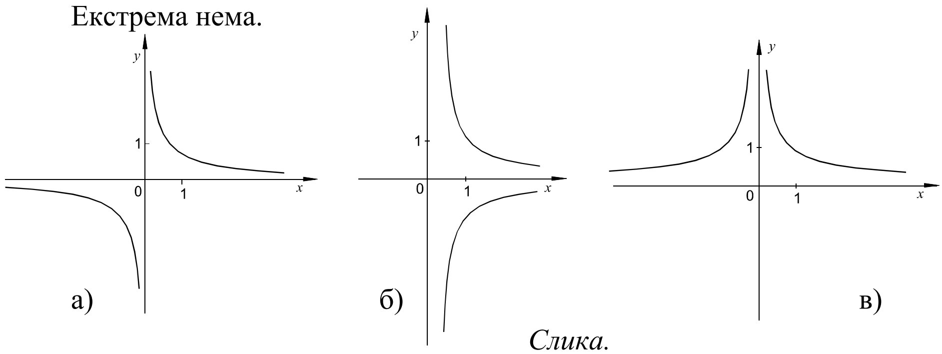
2) $k<0$**,** $y=x^{-m/n}$**.**

График је крива хиперболичног типа са асимптотама које су координатне осе (слика).

Прекид код $x=0$. Крива се асимптотски приближава оси *x* брже, а оси *y* спорије, што је већи $|k|$.

Симетрија у односу на осе и координатни почетак зависи од парности бројева *m* и *n* исто као у случају $k>0$, тиме се одређује ток функције.

Екстрема нема.



Слика.

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ И ЛОГАРИТАМСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Експоненцијална функција: $y=a^x=e^{bx}$ $(a>0, b=\ln a)$ **(слика)**

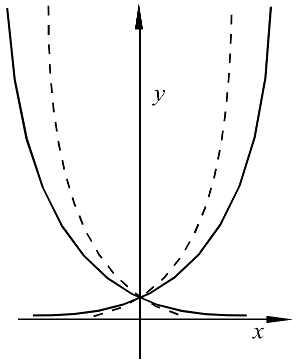
График је експоненцијална крива (за $a=e$ је природна експоненцијална крива $y=e^x$).

Функција има само позитивне вредности.

За $a>0$ (тј. $b>0$) монотоно расте од 0 до ∞.

За $a<0$ (тј. $b<0$) монотоно опада од ∞ до 0, брже, што је већи $|b|$.

Крива пролази кроз тачку $A(0,1)$ и асимптотски се приближава ка оси x (за $b>0$ са леве стране, за $b<0$ са десне стране) брже, што је већи $|b|$. Функција $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ расте ако је $a<0$ опада ако је $a>1$.



Слика.

Логаритамска функција: $y=\log_a x \quad (a>0)$

График је логаритамска крива (симетрична слика експоненцијалне криве у односу на симетралу првог квадранта $y=x$.

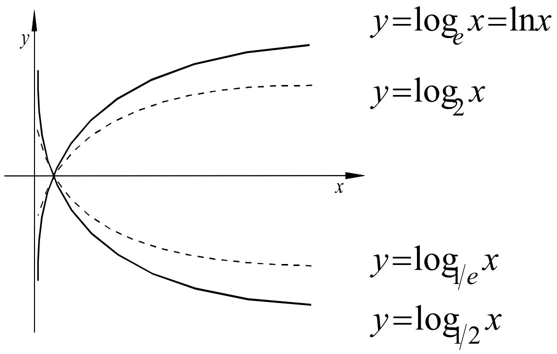
За $a=e$ је природна логаритамска крива $y=\ln x$.

Функција постоји само за $x>0$.

За $a>1$ монотоно расте од $-\infty$ до $+\infty$.

За $a<1$ монотоно опада од $+\infty$ до $-\infty$ спорије, што је већи $|\ln a|$.

Крива пролази кроз тачку $A(1,0)$ и асимптотски се приближава оси y (при $a>0$ одоздо, при $a<1$ одозго) брже, што је већи $|\ln a|$.



Функција $y=Ae^{-ax}\sin(\omega x+\varphi_0)$

График је крива пригушеног треперења

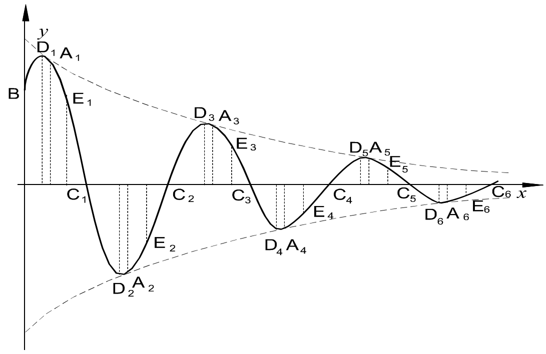
Крива трепери око осе Ox и асимптотски јој се приближава, при чему две криве $y=\pm Ae^{-ax}$ ту криву обухватају и дотичу у:

$$A_1, A_2, \ldots\left(\frac{(k\pm \frac{1}{2})\pi-\varphi_0}{\omega}, (-1)^k\ Ae^{-ax}\right).$$

Пресеци са осама: $B(0, A\sin\varphi_0)$, $C_1, C_2, \ldots\left(\frac{k\pi-\varphi_0}{\omega}, 0\right)$;

Екстреми $D_1, D_2 \ldots$ код $x=\frac{k\pi-\varphi_0+\alpha}{\omega}$;

Тачке превоја: $E_1, E_2 \ldots$ за $x=\frac{k\pi-\varphi_0+2\alpha}{\omega}$, где је $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega}{\alpha}$



Тригонометријске функције

Синус: $y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$

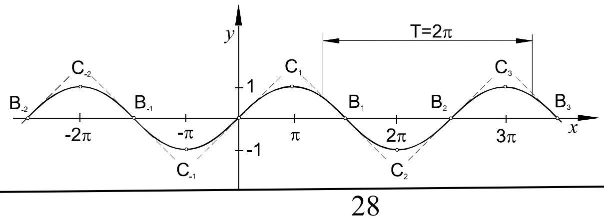
График је *синусоида*.

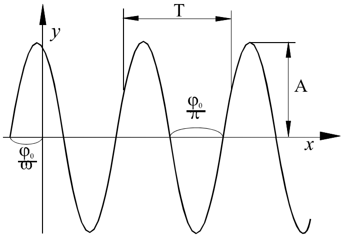
При $A=\omega=1$ и $\varphi_0=0$ је *обична синусоида* $y=\sin x$ (слика, непрекидна крива са периодом $T=2\pi$.

Општа синусоида је у односу на обичну растегнута дуж осу y $|A|$ пута ($|A|$ је амплитуда) , дуж осе x је стиснута ω пута (ω - *фреквенција*) , и померена улево за $\frac{\varphi_0}{\omega}$ (φ_0 је почетна *фаза*) .

Период је $T=\frac{2\pi}{\omega}$; Пресеци са осом x: $B_1, B_2, \ldots\left(\frac{k\pi-\varphi_0}{\omega}, 0\right)$.

Екстремне вредности $C_1, C_2 \ldots\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi-\varphi_0}{\omega}, (-1)^k\ A\right)$





Косинус: $y = A\sin(\omega x + \varphi_0)$ **;**

Ову једначину можемо написати и овако: $y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

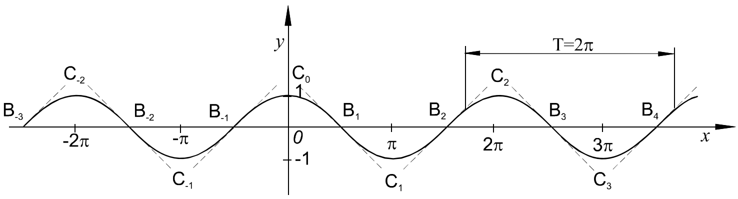
График је *синусоида (косинусоида)*.

Косинусоида $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Сече осу *x*: $B_1, B_1, ...[(k + 1/2)\pi, 0]$.

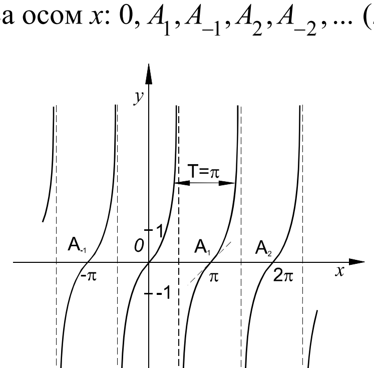
Уједно су тачке превоја са углом $\pm\frac{\pi}{4}$ према оси *x*.

Екстреми: $C_1, C_2, ...[k\pi, (-1)^k]$.



Тангенс: $y = tgx$

График је *тангенсоида*, периодична крива са периодом $T = \pi$ са асимптотом $x = (k + \frac{1}{2})\pi$. Када се *x* мења од $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, *y* монотоно расте од $-\infty$ до $+\infty$, затим се вредности *y* понављају. Пресеци са осом *x*: 0, $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, ...$ $(k\pi, 0)$ уједно су тачке превоја са углом $\frac{\pi}{4}$ према оси *x*.



Котангенс: $y = \operatorname{ctg} x$ **, или** $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$**.**

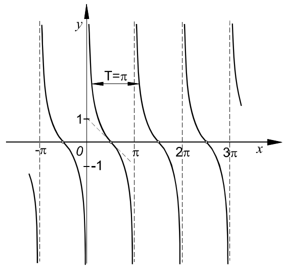


График је *тангенсоида*, у односу на tg$x$ и померена улево за $\pi/2$.

Асимптоте су $x = k\pi$.

Када се x мења од 0 до π, y монотоно опада од $+\infty$ до $-\infty$, затим се врадности y понављају.

Пресеци са осом x:

$A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, ...[(k+\frac{1}{2})\pi, 0]$, уједно су тачке превоја са углом $\pi/4$ према оси x.

Инверзне тригонометријске (циклометријске) функције

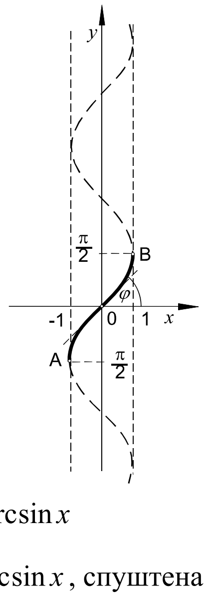
Графици ових функција се добијају из графика тригонометријских функција осном симетријом у односу на праву $y = x$.

Аркус-синус: $y = \arcsin x$

Фунција је дефинисана само за $|x| < 1$, и вишезначна је.

Главни њен део $y = \arcsin x$ (извучено на слици) монотоно расте од $A(-1, -\frac{\pi}{2})$ до $B(+1, +\frac{\pi}{2})$;

У координатном почетку је тачка превоја и средиште симетрије криве.



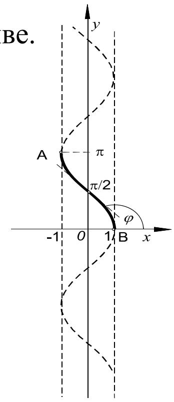
Аркус-косинус: $y = \arcsin x$

Иста крива као и за $\arcsin x$, спуштена за $\frac{\pi}{2}$.

Функција је дефинисана за $|x| \leq 1$, и вишезначна је.

Главни њен део $y = \arcsin x$ (извучено на слици) монотоно пада од $A(-1, +\pi)$ до $B(+1, 0)$.

Тачка $(0, \dfrac{\pi}{2})$ је средиште симетрије и тачка превоја криве.



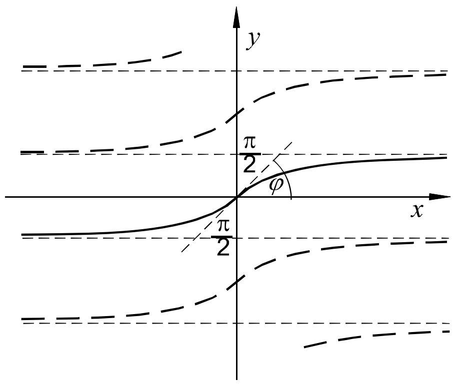
Аркус-тангенс: $y = \operatorname{arc\,tg} x$

Функција је вишезначна.

Главни њен део $y = \operatorname{arc\,tg} x$ монотоно расте од $-\dfrac{\pi}{2}$ до $-\dfrac{\pi}{2}$;

Координатни почетак је тачка превоја (са налеглим углом $\dfrac{\pi}{4}$), такође је средиште симетрије криве.

Остале вредности y добијамо из главног дела ако овоме додамо $\pm k\pi$. Асимптоте су : $y = \pm(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$.



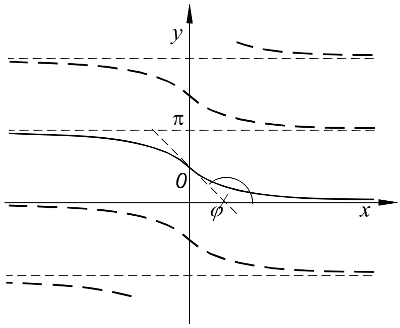
Аркус-котангенс: $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

Функција је вишезначна.

Главни њен део $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ монотоно опада од π до 0; тачка превоја (средиште симетрије) је $A\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ са налеглим углом $\dfrac{3\pi}{4}$.

Остале вредности y добијамо из главног дела ако му додамо $\pm k\pi$.

Асимптоте су: $y = \pm k\pi$.

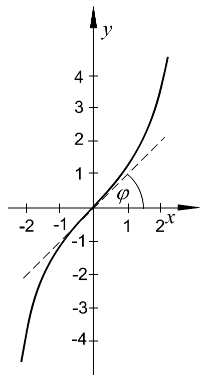


ХИПЕРБОЛИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

Синус хиперболични: $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Функција је непарна, монотоно расте од $-\infty$ до $+\infty$, координатни почетак је тачка превоја $(\varphi = \dfrac{\pi}{4})$ и средиште симетрије криве.

Асимптота нема.



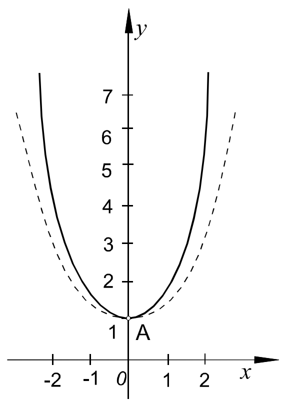
Косинус хиперболични: $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

График је *ланчаница*.

Функција је парна. За $x < 0$ опада од $+\infty$ до 1.

За $x > 0$ расте од 1 до $+\infty$. Минимум је у тачки $A(0,1)$.

Асимптота нема. Крива лежи симетрично према оси y и изнад параболе $y = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ (нацртано-испрекидано)

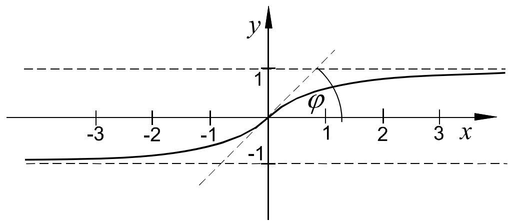


Тангенс хиперболични: $y = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Функција је непарна, монотоно расте од -1 до +1.

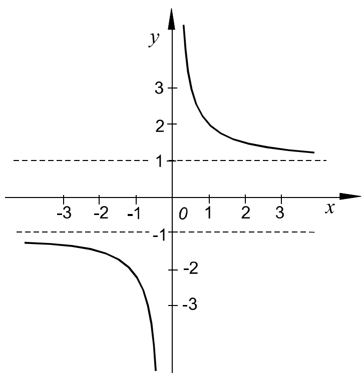
Координатни почетак је тачка превоја $(\varphi = \dfrac{\pi}{4})$ и средиште симетрије криве.

Има две асимптоте : $y = \pm 1$.



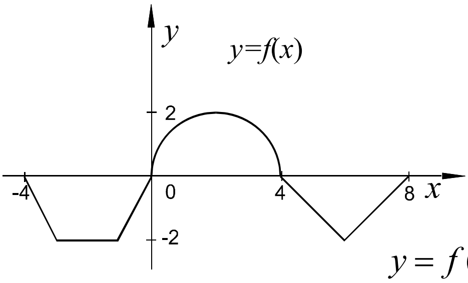
Котангенс хиперболични: $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Функција је непарна, има прекид за $x = 0$.
За $x < 0$ опада од -1 до $-\infty$, за $x > 0$ опада од $+\infty$ до +1.
Екстрема и тачака превоја нема.
Има три асимптоте: $x = 0$ и $y = \pm 1$



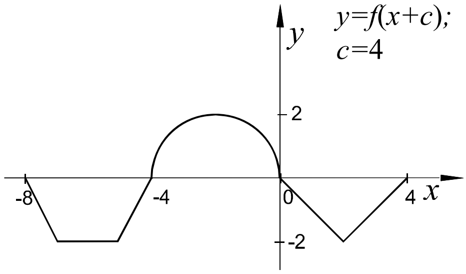
Трансформације графика

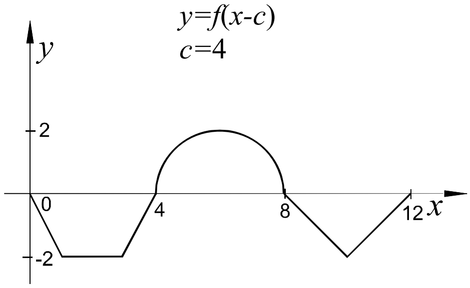
Ако знамо график неке функције $y = f(x)$ онда на основу њега можемо конструисати графике:



$$y = f(x \pm c)$$

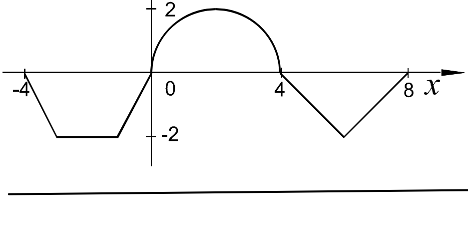
Транслацијом (померањем) почетка графика у лево за дужину *c* или у десно ако је *–c* .

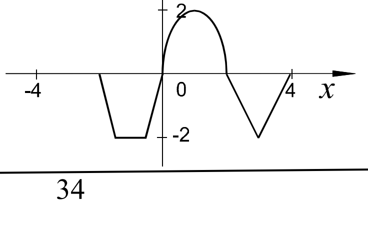


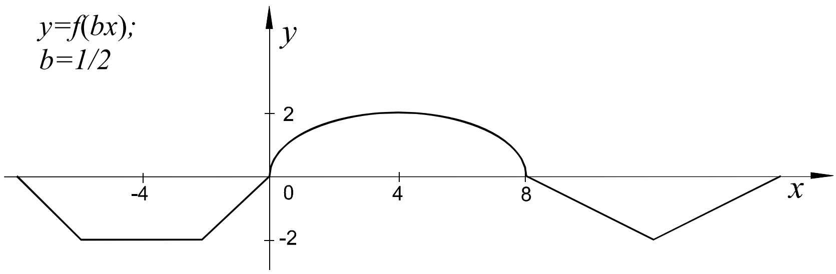


$$y = f(bx), b > 0$$

Сажимање дуж *x*-осе за *b* пута,
или истезање за $1/b$ **.**

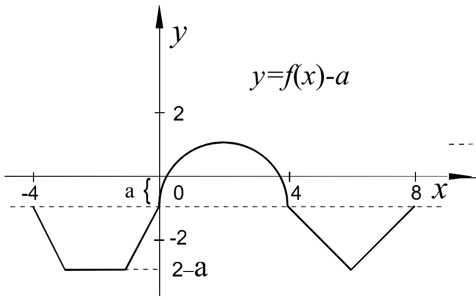


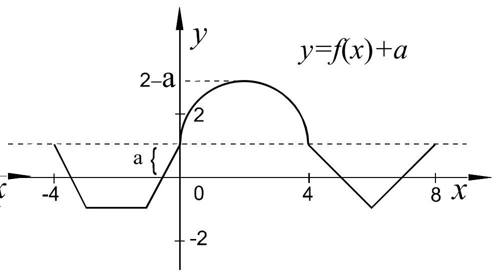




$$y = f(x) \pm a$$

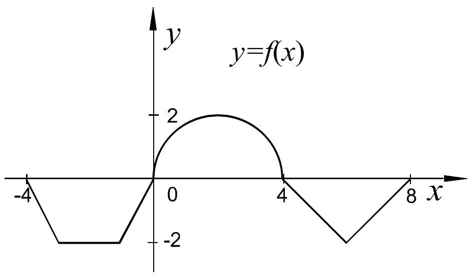
Померање графика на горе ако је $+a$ или на доле ако је $-a$ у односу на *x*-осу.

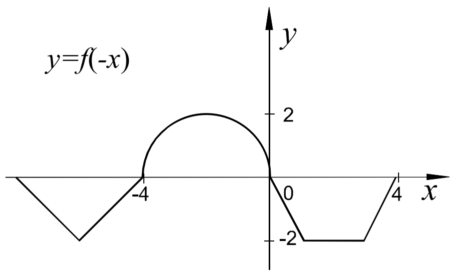




$$y = f(-x)$$

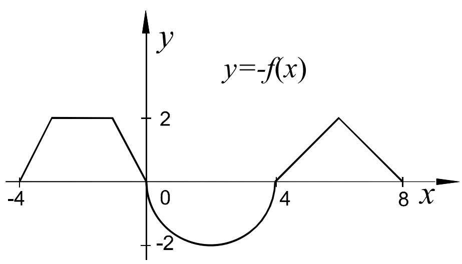
Осно симетрично почетном графику у односу на *y*-осу.





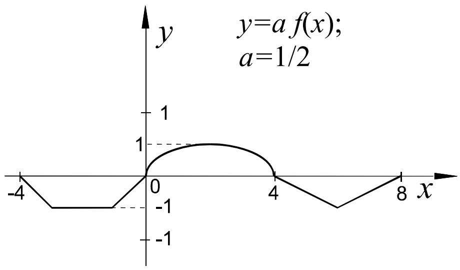
$$y = -f(x)$$

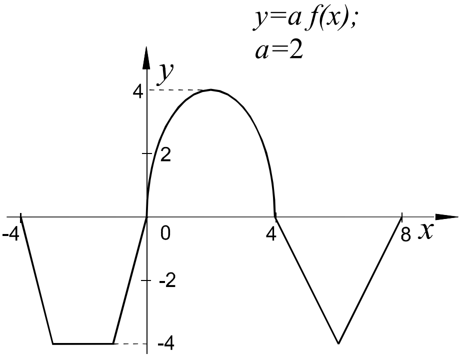
Осно симетрично почетном графику у односу на *x*-осу.



$$y = a\, f(x), a > 0$$

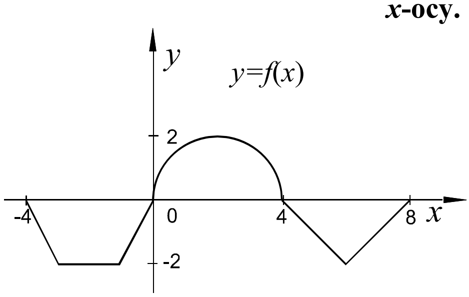
Истезање по *y*-оси *a* пута.

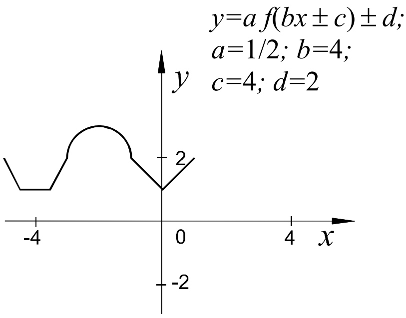




$$y = a\, f(bx \pm c) \pm d$$

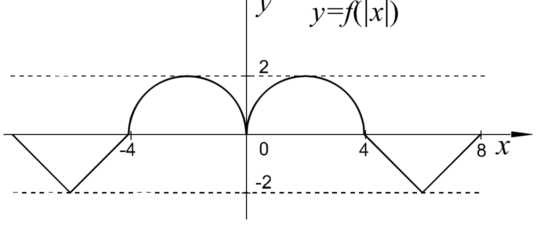
Редом сажимање графика по *x*-оси *b* пута, померање у лево (десно) за *c*, истезање по *y*-оси *a* пута, померање графика горе (доле) за *d* у односу на *x*-осу.





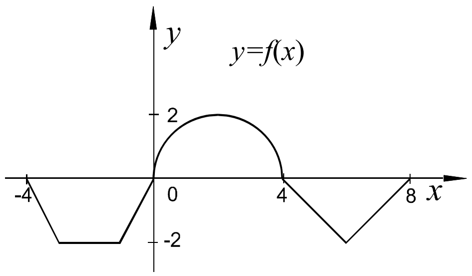
$$y = f(|\,x\,|)$$

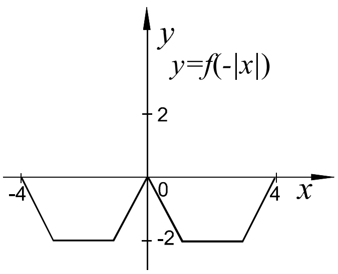
У десној полуравни $(x > 0)$ **график функције је исти као** $f(x)$**, а у левој полуравни** $x < 0$ **симетрична слика десне полуравни у односу на *y*-осу као осу симетрије.**



$y = f(-|x|)$

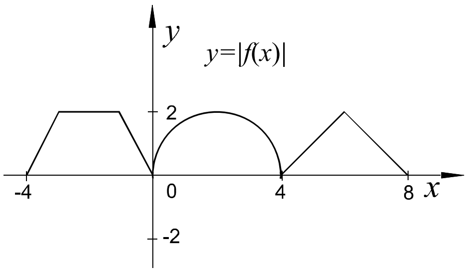
У левој полуравни $(x<0)$ график функције остаје као $f(x)$, а у десној полуравни се конструише симетрична слика леве полуравни.





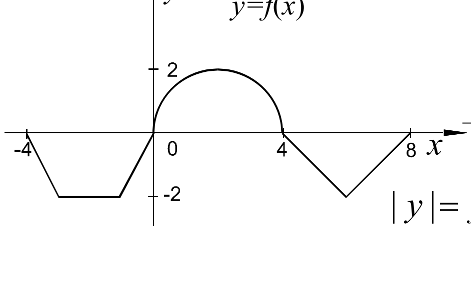
$y = |f(x)|$

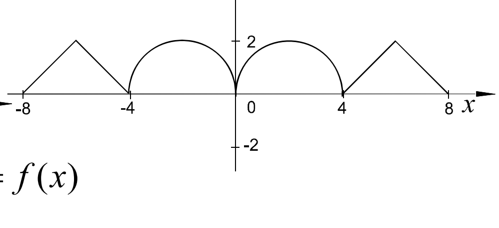
Део графика $f(x)$ који је у горњој полуравни $(y>0)$ не мења се, а део графика у доњој полуравни $(y<0)$ симетрично се пресликава на горњу полураван у односу на *x*-осу као осу симетрије.



$y = |f(|x|)|$

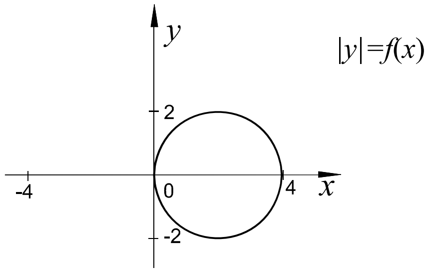
У десној полуравни $(x>0)$ се прво конструише график $y = f(|x|)$, па онда се затим симетрично пресликава на леву полураван у односу на *y*-осу као осу симетрије.





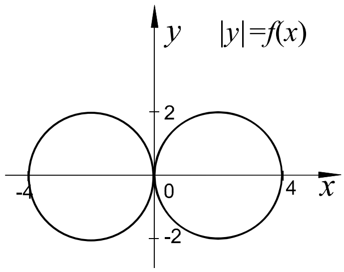
$|y| = f(x)$

Део графика $f(x)$ у горњој полуравни $(y>0)$ остаје и додаје се његова симетрична слика у односу на *x*-осу као осу симетрије.



$$|\,y\,| = f(|\,x\,|)$$

У десној полуравни $(x>0)$ остаје део графика $y=f(x)$ који је изнад *x*-осе $(y>0)$ и додаје се прво симетричан одраз у огледали на *x*-осу као осу симетрије, а затим и симетричан одраз добијеног дела у односу на *y*-осу као осу симетрије.

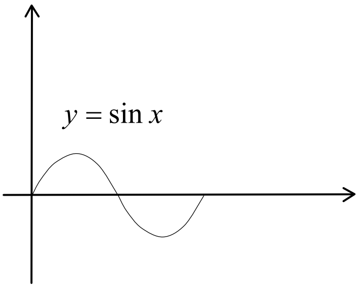


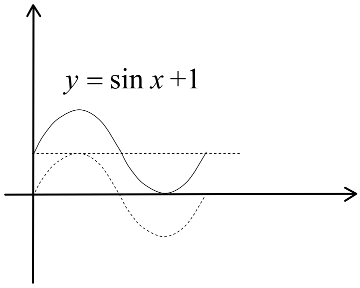
***Пример*: На основу графика $y = \sin x$ на интервалу $[0, 2\pi]$ нацртати графике следећих функција:**

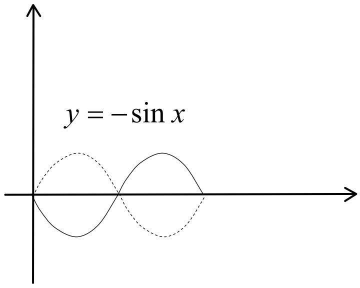
$y = \sin x + 1 \qquad y = -\sin x \qquad y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

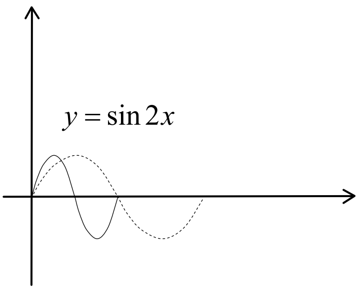
$y = 2\sin x \qquad y = \sin 2x \qquad y = \sin \frac{1}{2} x$

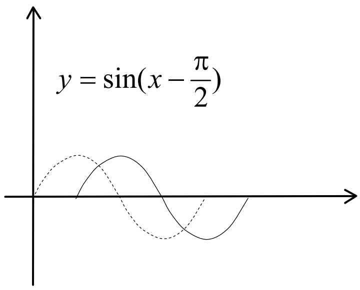
Решење:

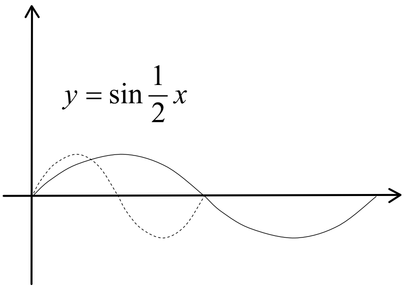


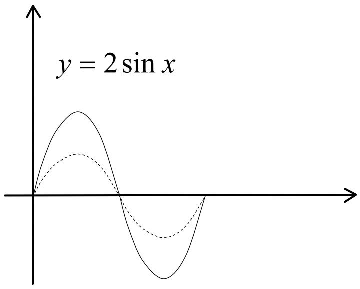










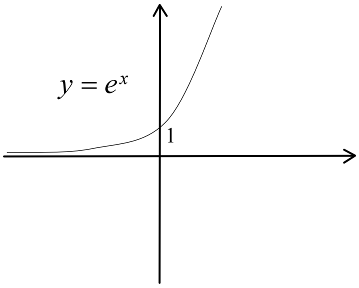


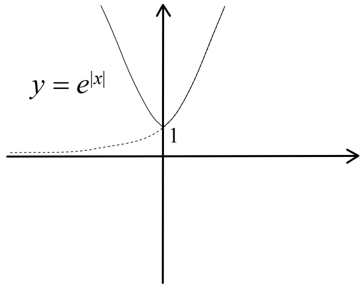
Пример**: На основу графика** $y = e^x$ **нацртати следеће графике:**

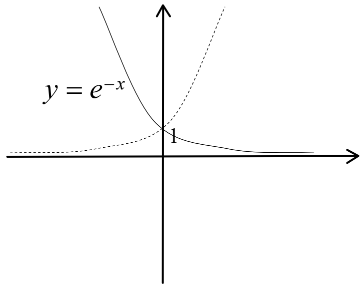
$y = e^{|x|}$ $\quad$ $y = e^{-x}$ $\quad$ $y = -e^x$

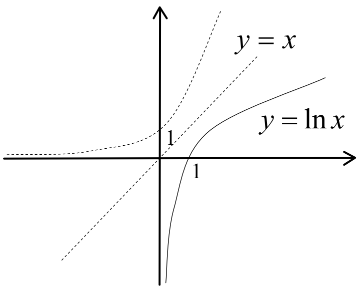
$y = -e^{-x}$ $\quad$ $y = \ln x$ $\quad$ $y = \ln |x|$.

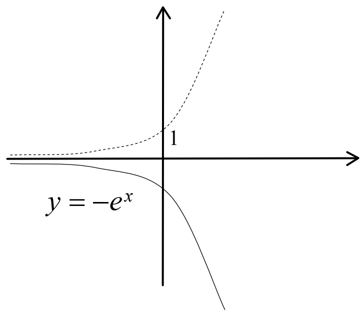
Решење:

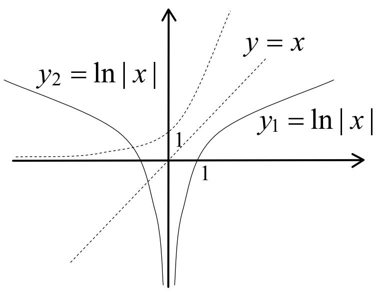


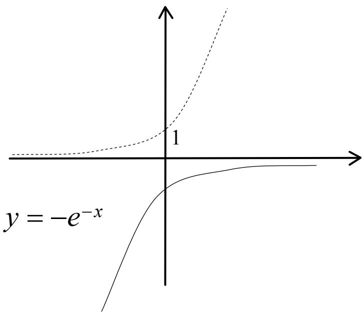












Примери испитних рокова из Математике 1 ранијих година

Напомена: Испитни задаци који ће бити у јануару 2021. године биће: део из материјала који су послати онлајн (задаци који су били ранијих година - пример су наредни задаци), део из вашег домаћег задатка и део од задатака који су рађени на вежбама.

Задаци означени црвено се не раде за Математику 1 ове школске године.

Писмени испит из математике, септембарски рок,

1. Реши систем једначина:

а) $\begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + (a+1)y + z = 2a \\ x + y + (1-a)z = 0 \end{array}$

б) $\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax + 4y + z = 0 \\ 6x + (a+2)y + 2z = 0 \end{array}$

2. Одреди x тако да тачке:

а) $A(x,0,1),\ B(1,1,1),\ C(2,2,2),\ D(6,3,0)$

б) $A(x,0,1),\ B(4,4,6),\ C(2,2,3),\ D(10,14,17)$

припадају једној равни и написати једначину те равни.

3. Одреди област дефинисаности функције

а) $y = \sqrt{\ln \dfrac{x-4}{x-6}} + \sqrt{4-3x-x^2}$

б) $y = \arcsin \dfrac{5x+6}{x-8}$.

4. Израчунај граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}$

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$.

5. Испитати и нацртати график функције:

а) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$

б) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3}$

6. У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте. Израчунај површину која је ограничена овим тангентама и параболом.

Писмени испит из математике 1, други октобарски рок, .

1. Одредити једначину равни која садржи праву

$p:\begin{cases} 2x-y+3z-5=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ и паралена је вектору

$\vec{b}(2,-1,-2)$.

2. Ако је $|\vec{a}|=1$ и $|\vec{b}|=2$ и угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је $\frac{\pi}{3}$, израчунати:

а) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$, б) $|2\vec{a}-\vec{b}|$, в) $|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}|$.

3. Одреди област дефинисаности и област вредности функције

а) $y=\ln\frac{x-4}{x-2}+\sqrt{3x-x^2}$ **,** б) $y=\arcsin(2+3^x)$

4. Наћи изводе следећих функција:

$y=\ln\sin\sqrt{x}$, $\begin{matrix} x=a(t-\sin 2t) \\ y=a(1-\sqrt[3]{t}) \end{matrix}$, $e^{x+y}=\sqrt[3]{xy}-1$.

5. Решити и дискутовати систем линеарних једначина у зависности од реалног параметра a :

$$\begin{aligned} &x-ay+2z-1=0 \\ &x+y+z-3=0 \\ &2x+2y-az-6=0 \end{aligned}$$

Писмени испит из математике 1, други октобарски рок, .

1. Одредити једначину равни која садржи праву $p:\begin{cases} 2x-y+3z-5=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ и нормална је на раван $\alpha: x-2y+y+5=0$.

2. Дати су вектори $\vec{a}(1,1,-1)$, $\vec{b}(-2,-1,2)$ и $\vec{c}(1,-1,2)$

а) Раставити вектор $\vec{b}$ помоћу вектора $\vec{a},\vec{c}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

б) Одредити угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

в) Израчунати површину троугла MNP, ако су тачке M,N,P редом средишта вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

3. Наћи област дефинисаности и област вредности функције

а) $y=\frac{1}{\log(x^2+1)}+\sqrt{x^2-x-12}$, б) $y=\sin\ln(2x-3)$.

4. Одредити изводе следећих функција:

$y=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}+e^{-x^2}$, $\begin{matrix} x=\pi+\cos^2 t \\ y=\ln(\frac{a}{2}+\cos^2 t) \end{matrix}$, $e^x+e^{-y}=e^3$.

5. Решити и дискутовати систем линеарних једначина у зависности од реалног параметра a :

$$x-2y+z-1=0$$
$$5x-2y+az-1=0$$
$$3x+2y+z-6=0$$

Писмени испит из математике 1

1. Ако је $|\vec{a}|=1$ и $|\vec{b}|=2$ и угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\frac{\pi}{3}$, израчунати:

а) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$, б) $|2\vec{a}-\vec{b}|$, в) $|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}|$.

2. Дати су вектори $\vec{a}(1,1,-1)$, $\vec{b}(-2,-1,2)$ и $\vec{c}(1,-1,2)$

а) Раставити вектор $\vec{b}$ помоћу вектора $\vec{a},\vec{c}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

б) Одредити угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

в) Израчунати површину троугла MNP, ако су тачке M,N,P редом средишта вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

3. Решити и дискутовати систем линеарних једначина у зависности од реалног параметра a:

$$4x+(a+3)y+8z=-2$$
$$(a+2)x+3y+6z=1$$
$$x+ay+2az=-1$$

4. Матричном методом реши систем линеарних једначина

$$2x+3y+z=11$$
$$3x+5y+2z=19$$
$$x+2y+3z=14$$

5. Користећи Кронекер-Капелијеву теорему испитати сагласност система

$$x+2y=3$$
$$3x+6y=9$$
$$2x+4y=k;\ k\in R$$

Писмени испит из математике 1

1. Одредити нуле плинома $P(x)=x^3+7x^2-4x-3$.

2. Дата је функција

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1\\ A, & x=1\end{cases}$$

Одреди A тако да функција буде непрекидна.

3. Одреди област дефинисаности и област вредности функције

а) $y=\ln\frac{x-4}{x-2}+\sqrt{3x-x^2}$, б) $y=\arcsin(2+3^x)$

4. Дата је функција $y=\ln(2x-1)$. Одредити њену инверзну функ-цију, њен први извод и нацртајте график функције.

5. Наћи изводе следећих функција:

$$y=\ln\sin\sqrt{x}\ , \qquad \begin{array}{l} x=a(t-\sin 2t) \\ y=a(1-\sqrt[3]{t}) \end{array}, \qquad e^{x+y}=\sqrt[3]{xy}-1\ .$$

6. Одреди

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{2x}$.

7. Решити и дискутовати систем линеарних једначина у зависности од реалног параметра a:

$$\begin{array}{l} x-ay+2z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \\ 2x+2y-az-6=0 \end{array}$$

8. Решити матричну једначину $AX=X+B$, ако је:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Писмени испит из математике 1

1. Одредити нуле плинома $P(x)=x^3-6x^2+13x-10$, ако је једно решење $x_1=2-i$.

2. Дата је функција

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1 \\ A, & x=-1 \end{cases}$$

Одреди A тако да функција буде непрекидна.

3. Наћи област дефинисаности и област вредности функције

а) $y=\dfrac{1}{\log(x^2+1)}+\sqrt{x^2-x-12}$, б) $y=\sin\ln(2x-3)$.

4. Одреди инверзну функцију, њен прави извод и нацртати њен график, ако је задана функција $f(x)=e^{2x-4}$.

5. Одредити изводе следећих функција:

$$y=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}+e^{-x^2}\ , \qquad \begin{array}{l} x=\pi+\cos^2 t \\ y=\ln(\frac{a}{2}+\cos^2 t) \end{array}, \qquad e^x+e^{-y}=e^3.$$

6. Одреди

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)^{4x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ar\sin x}{x}$.

7. Решити и дискутовати систем линеарних једначина у зависности од реалног параметра a:

$x-2y+z-1=0$
$5x-2y+az-1=0$
$3x+2y+z-6=0$

8. Написати један пример алгебарске криве трећег реда и одредити њене нуле. Написати један пример трансцендентне криве и нацртати њен график

Писмени испит из математике

1. Одреди област дефинисаности и извод функција:

$$y=\sqrt{\ln\frac{x+1}{x^2-4}}, \quad y=\frac{\sqrt{4-3x-x^2}}{\ln(4-2x)}.$$

2. Испитати и нацртати функције:

$$y=\frac{\ln(x+2)}{x^2}, \quad y=\frac{x^2-x}{x+1}, \quad y=\frac{e^{-2x}}{x-3}, \quad y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

3. Израчунати интеграле:

$$\int_{-1}^{0}\frac{3dx}{(x+2)\sqrt{1-x}}, \quad \int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{3x^2+1}.$$

4. Одредити запремину тела која настаје ротацијом око x-осе фигуре омеђене кривама $x^2+y^2=4$ и $y^2=3x$ (унутрашњи део параболе).

5. а) Решити диференцијалну једначину $y'=\frac{x+y}{x=y}$.

б) Одредити Маклоренов полином четвртог степена функције $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

6. Применом Крамеровог правила решити и дискутовати систем линеарних једначина.

$x+2y=az=a$

$ax+4y-4z=2$

$(a-4)x-2ay+4y=1$, у зависности од реалног параметра a.

Писмени испит из математике 1.

1. Дата је крива $y=x\ln x$.

а) Испитати и нацртати њен график.

б) Израчунати површину коју затвара крива са x-осом на интервалу $[0,e]$.

ц) На кривој одреди тачку која је најближа правој $y=-2x-4$, а затим одреди удаљеност те тачке од задате праве.

2. а) Испитати и нацртати график функције $y=(x-3)\sqrt{2x-1}$.

б) Израчунати интеграл $\int (x-3)\sqrt{2x-1}dx$.

3. Решити диференцијалну једначину $dy(1+x+y)-(1-3x-3y)dx=0$

4. Одредити површину која је ограничена луком криве $y=e^{-x}$, њеном асимптотом и тангентом која пролази кроз координатни почетак.

5* Решити и дискутовати систем једначина:

$$x+2z+t=-1$$
$$x+y+z=2$$
$$-x+y-3z+at=0$$
$$x+2z=a+1,$$

где је a реалан параметар.

Математика 1.

1. а) Испитати и нацртати график функције $y=x^2(1-\ln x)$

б) Одредити област дефинисаности и екстремне вредности функције $y=(2+x^2)e^{-x^2}$

2. Израчунати интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$.

3. Одредити запремину тела које настаје ротацијом лука ограниченог кривом $y=e^{-x^2}$ и x-осом око y осе.

4. Одредити површину која је ограничена луком криве $y=e^{-2x}$, њеном асимптотом и тангентом која пролази кроз координатни почетак.

5. Одредити граничне вредности

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{3n}-5^{2n}+6}{125^n+5^n-4}$.

Математика 1.

1. Одредити област дефинисаности и први извод функције:

$$y=\sqrt{x^2-4}+\ln(x-1), \quad y=\ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},\ a\in R,$$

$$y=\sin\ln(2x-3), \qquad y=\ln\arcsin\frac{x+2}{5-x}.$$

2. Испитати и нацртати график функције:

$y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$, $\quad y=\dfrac{4x^2+4x+1}{x^2-x}$,

$y=(2+x^2)e^{-x^2}$, $\quad y=(x^2-2x+2)e^x$.

3. Око лопте полупречника r описана је купа минималне запремине. Одреди висину купе.

4. Израчунати површину лика ограниченог кривама $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2}$ и $y=2x-3$.

5. Израчунати интеграл

$\int\dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$, $\int\dfrac{4+x^2}{1+x^2}dx$, $\int x^2\cos\ln x dx$, $\int_1^e\dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

6* Дати су вектори $\vec{a}(1,2,-1)$ и $\vec{b}(2,0,3)$.

а) Одреди $2\vec{a}\times\vec{b}$,

б) пројекцију вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

Математика 1.

1. Испитати и нацртати график функције:

$y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}$, $\quad y-\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$, $\quad y=(x-1)^2(x-2)^3$.

2. а) Одреди извод функције $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

б) Одреди област дефинисаности функције $y=\cos\sqrt{1+\sin^2 x}$

3. Решити интеграле

а) $\int x\ln(x^2+1)dx$, $\quad$ б) $\int\sin^2(\sqrt[3]{x})dx$.

4. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $(1+x^2)y'+1+y^2=0$ за које је $y(-1)=1$.

5. У тачки $P(3,2)$ параболе $y^2=2(x-1)$ конструисана је тангента.

а) Израчунај запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене параболом, тангентом параболе и x-осом.

б) Израчунати површину фигуре ограничене тангентом и параболом.

Математика

1. Одреди област дефинисаности функције а) $y=\log\dfrac{5x-x^2-6}{2x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+3x-4}$

б) $y=\sqrt{x^3-3x}+\ln\dfrac{x+1}{4x^2-3x+\frac{1}{2}}$.

2. Испитати и нацртати график функције:

а) $y=(2+x^2)e^{-x^2}$ б) $y=x+\dfrac{2x}{x^2-1}$

в) $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ г) $y=2\cos(x-\pi)$

3. Одредити реалан параметар $\lambda\in R$ тако да вектори

а) $\vec{a}(-2,5,4)$; $\vec{b}(2,-3\lambda,1)$

б) $\vec{a}(-3,3\lambda,4)$; $\vec{b}(4,2,3)$ образују угао од

$45°$ степени $30°$ степени.

4. Израчунај

а) $\displaystyle\int_1^3\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

б) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$.

5. Из тачке $A(-1,0)$ (прва група) $A(-2,0)$ (друга група) повучене су тангенте на криву $y^2=4x$. Одреди запремину обртног тела које настаје ротацијом око x -осе површине ограничене тим тангентама и кривом.

6. Решити диференцијалну једначину

а) $xy'=y(\ln y-\ln x)$

б) $(1+x^2)dx-xydy=0$ уз услов да је $y(2)=1$.

Математика јануар .

1. Одреди област дефинисаности и екстреме функције $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

2. Испитати и нацртати график функције $y=\dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{x}$.

3. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

4. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око y осе, лука криве $y=e^{-x^2}$ и x -осе.

5. Израчунати површину која је ограничена луком криве $y=e^{-2x}$, њеном асимптотом и тангентом која пролази кроз координатни почетак.

6. Израчунати граничне вредности

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+2n}{1+2+\ldots+n}$.

1. За разне вредности параметра a решити и дискутовати решења система једначина

$$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=1\\ a^2x+y+az&=1\\ ax+ay+z&=1 \end{aligned}$$

2. Дати су вектори $\vec{a}(2\lambda,1,1-\lambda)$, $\vec{b}(-1,3,0)$, $\vec{c}(5,-1,8)$.

а) Одредити λ тако да вектор $\vec{a}$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

б) За тако нађено λ одреди нагиб вектора $\vec{c}$ према равни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) За исто λ одреди запремину и једну висину паралелопипеда конструисаног над тим векторима.

3. Израчунати граничне вредности функција:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

4. Испитати и нацртати функцију:

а) $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+x+1}$ б) $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.