ПРЕДМЕТ:

ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА

Др Андреја Стефановић

ШКОЛСКА ГОДИНА: 2017/2018

СЕМЕСТАР: II

2. ГЕОМЕТРИЈСКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПОПРЕЧНИХ ПРЕСЕКА

2.1 Уводна разматрања

2.2 Површина попречног пресека

2.3 Статички момент површине попречног пресека

2.4 Моменти инерције попречног пресека

2.4.1 Аксијални момент инерције попречног пресека

2.4.2 Центрифугални момент инерције попречног пресека (за пар међусобно управних оса)

2.4.3 Поларни момент инерције попречног пресека (за тачку O – пол O, то јест за осу z управну на раван xy)

2.4.4 Моменти инерције раванских фигура

2.5 Геометријске карактеристике сложених површина

2.6 Општи израз за геометријске карактеристике попречних пресека

2.7 Промена момената инерције при трансформацији координатног система

2.7.1 Транслација координатног система

2.7.2 Ротација координатног система

2.8 Главни тежишни моменти инерције

2.8.1 Полупречници инерције

2.8.2 Елипса инерције

2.9. Отпорни момент

2. ГЕОМЕТРИЈСКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПОПРЕЧНИХ ПРЕСЕКА

2.1 Уводна разматрања

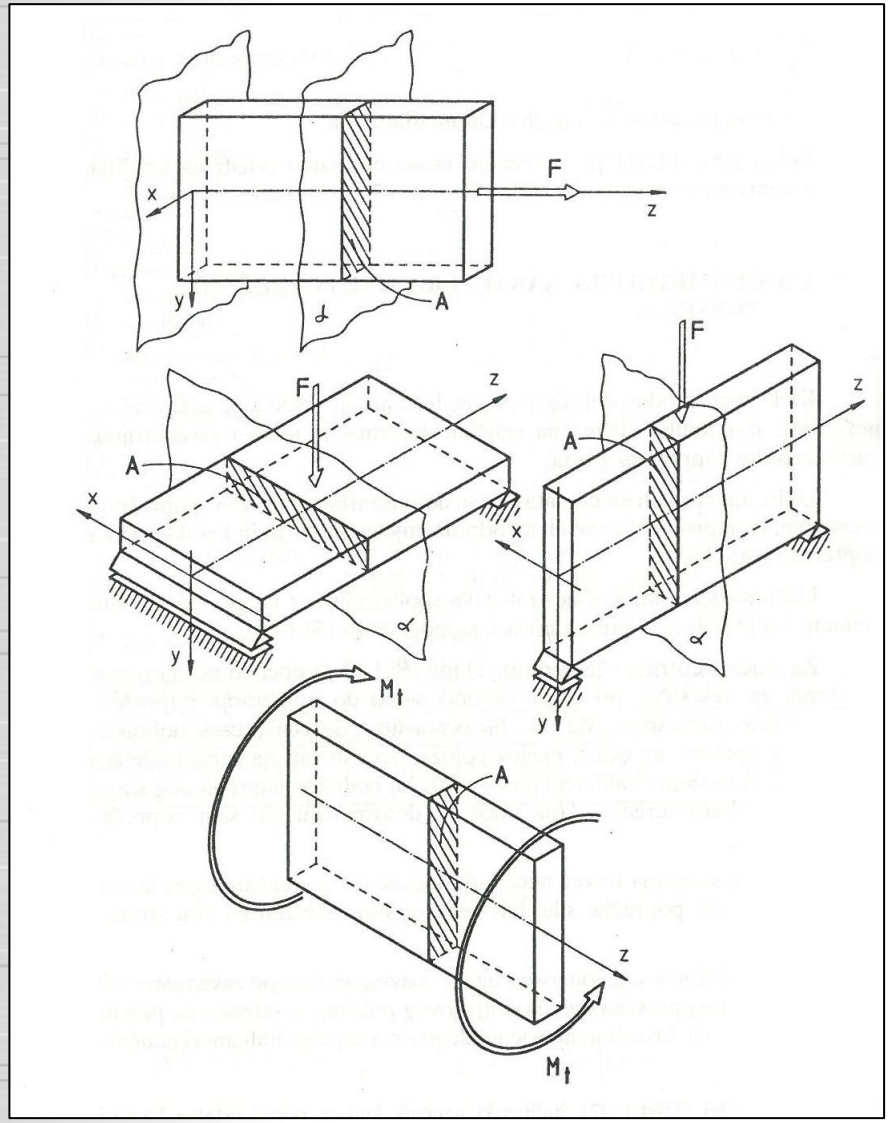
Попречни пресек је фигура у пресечној равни равни која је управна на подужну осу штапа (греде), односно на средњу површ (плоча и љуска) посматраног конструктивног носача.

При разматрању различитих случајева напрезања и њима одговарајућих деформација изведен је закључак да на величину деформација утичу не само спољашње оптерећење, врста материјала и величина попречног пресека, већ и геометријске карактеристике напрегнутог тела.

У случају конструктивних елемената који су дефинисани својом осом и попречним пресеком, проблем се своди на одређивање геометријских карактеристика попречних пресека.

Геометријска карактеристика попречног пресека је величина која дефинише попречни пресек и која зависи од његовог облика и положаја у простору (равни).

2.1 Уводна разматрања



Слика 2.1 Утицаји површине попречног пресека A у неким случајевима дејства оптерећења

2.1 Уводна разматрања

Геометријске карактеристике попречног пресека су:

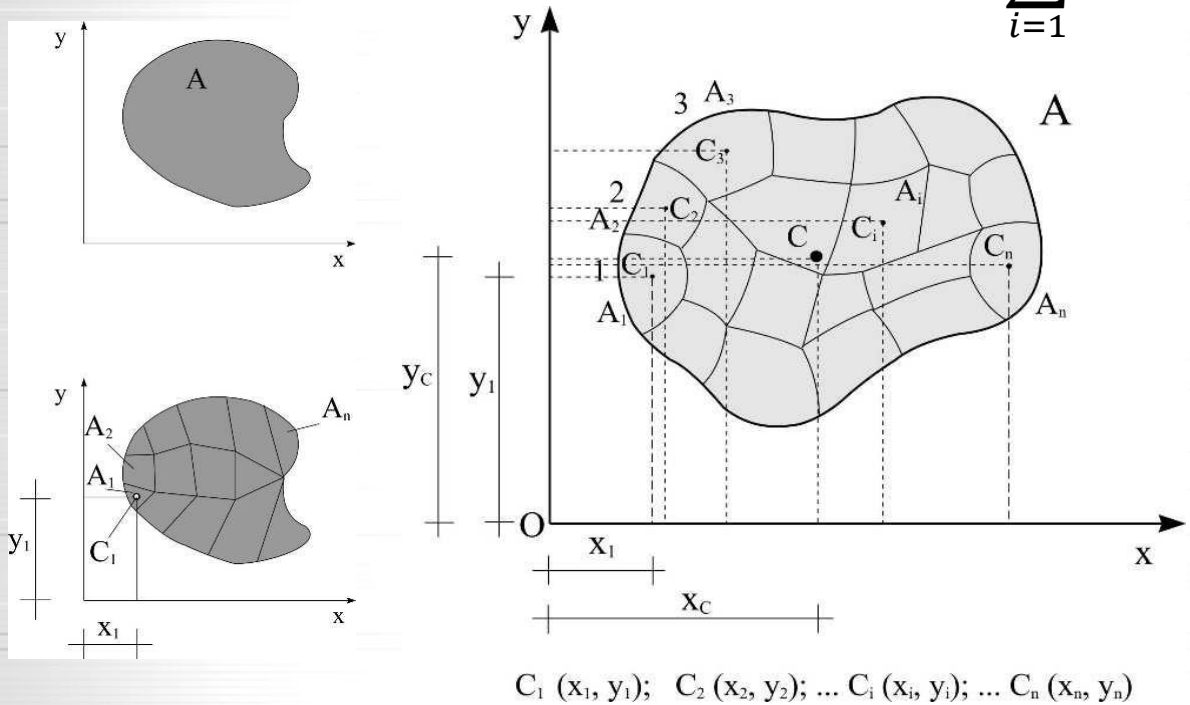
- површина попречног пресека,
- статички моменти попречног пресека,
- моменти инерције попречног пресека (аксијални, центрифугални и поларни).

2.2 Површина попречног пресека

Површина (A) је најједноставнија карактеристика попречног пресека.

Ако пресек може да се растави на коначан број делова чија су тежишта позната, онда се површина пресека рачуна као збир површина ових делова:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$



Слика 2.2 Попречни пресек подељен на коначан број делова површине

2.2 Површина попречног пресека

Ако пресек не може да се растави на коначан број делова чија су тежишта позната, онда се раздели на велики број елементарних површина, а затим се прелази на гранични случај, када је елементарна површина бесконачно мала а број елементарних површина тежи бесконачности.

Тачну вредност површине (A) добијамо интеграљењем:

$$A = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \int_A dA$$

Површина попречног пресека је увек већа од нуле, $A > 0$, јер је њена димензија дужина на други $[\mathrm{L}^2]$, а изражава се у јединицама $[m^2,\ \ cm^2]$.

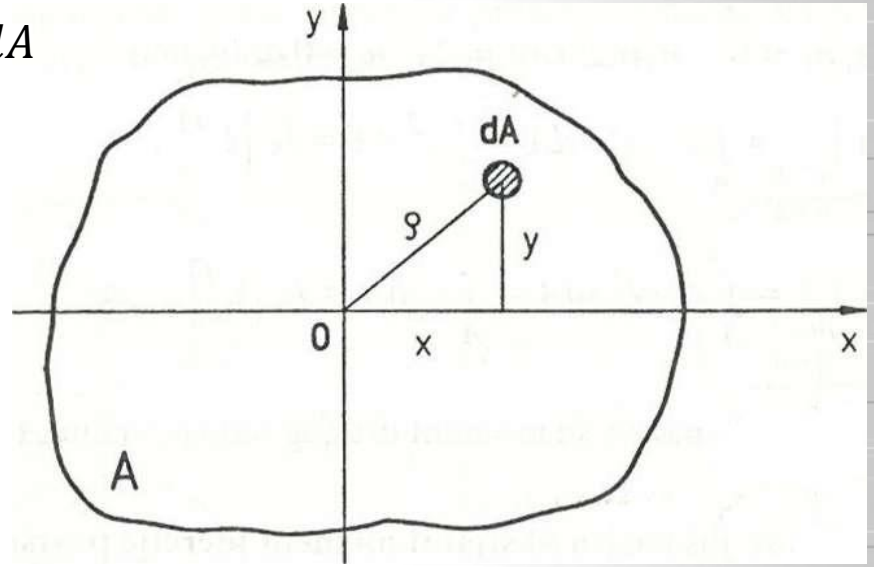
2.3 Статички момент површине попречног пресека

Статички момент површине за неку осу је интеграл по целој површини производа елементарне површине и координате која мери растојање од те осе:

$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$

Димензија статичког момента површине је дужина на трећи $[L \cdot L^2] = [L^3]$, а изражава се у јединицама $[m^3, \ \ cm^3]$.



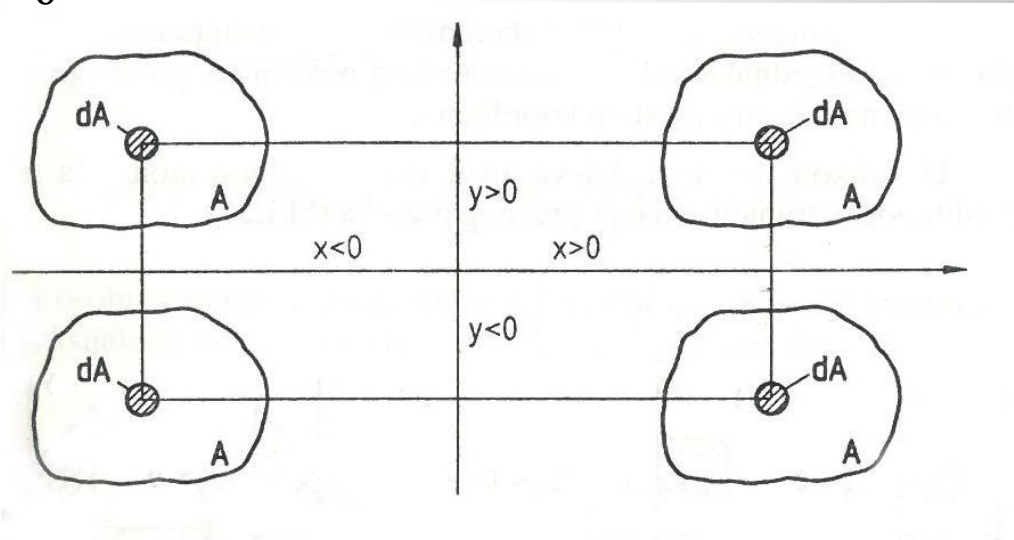
Слика 2.3 Геометријске карактеристике попречног пресека

2.3 Статички момент површине попречног пресека

У зависности од положаја попречног пресека у односу на изабрани координатни систем знак статичког момента ће бити:

у првом квадранту $S_x > 0, S_y > 0$
у другом квадранту $S_x > 0, S_y < 0$
у трећем квадранту $S_x < 0, S_y < 0$
у четвртом квадранту $S_x < 0, S_y > 0$

Може извући закључак да статички момент може бити величина **већа**, **мања** или **једнака нули**, а у зависности од положаја попречног пресека у односу на неки изабрани систем координата.



Слика 2.4 Анализа предзнака геометријских карактеристика поречног пресека

2.3 Статички момент површине попречног пресека

На основу **Вариљонове теореме – Момент резултанте једнак је збиру момената компонената**, изрази за координате тежишта равних површина могу се написати:

$$A \cdot x_c = \int_A x dA$$

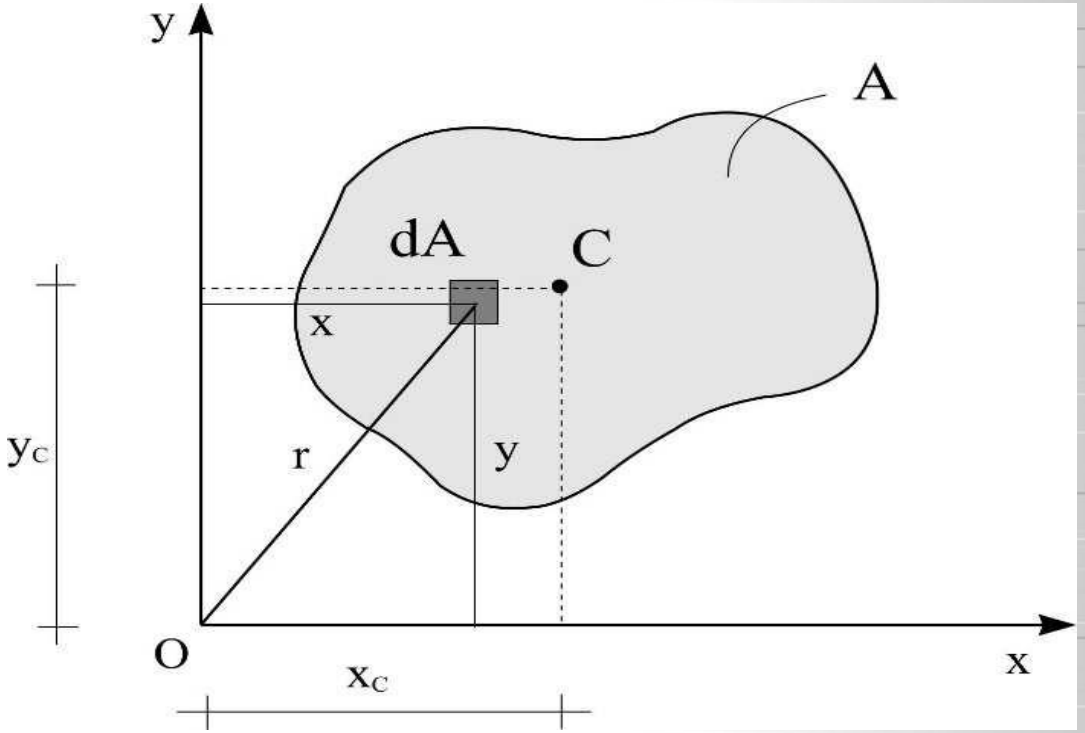
$$x_c = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{S_y}{A}$$

$$A \cdot y_c = \int_A y dA$$

$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{S_x}{A}$$

$$S_x = A \cdot y_c$$

$$S_y = A \cdot x_c$$



Слика 2.5 Координате тежишта попречног пресека

2.3 Статички момент површине попречног пресека

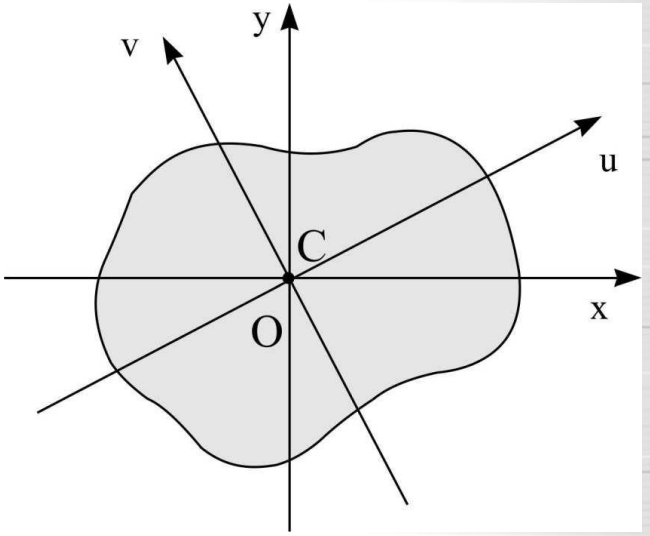
$$S_x = A \cdot y_c \qquad S_y = A \cdot x_c$$

Статички момент неке површине $\boldsymbol{A}$ (фигуре у равни) је геометријска карактеристика која, генерално, представља производ величине површине те фигуре и растојања њеног тежишта до осе у односу на коју се ова величина израчунава.

За **тежишну осу** попречног пресека вредност статичког момента је једнака **нули**.

$$x_C = 0,\ y_c = 0$$
$$S_x = 0, \qquad S_y = 0$$

$$u_C = 0,\ v_c = 0$$
$$S_u = 0, \qquad S_v = 0$$



Слика 2.6 Статички момент за тежишну осу

2.4 Моменти инерције попречног пресека

Моменти инерције попречног пресека су:

- аксијални момент инерције
- центрифугални момент инерције,
- поларни момент инерције.

2.4.1 Аксијални момент инерције попречног пресека

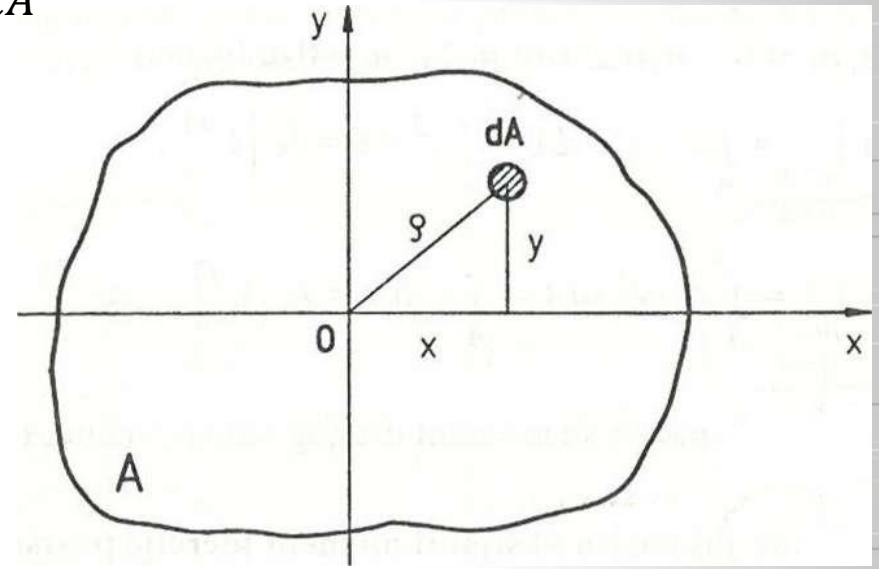
Аксијални момент инерције површине представља збир производа, по целој површини, свих елементарних површина и квадрата њиховог растојања од одговарајућих оса у равни те површине.

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

Аксијални моменти инерције због тога што су $x^2 > 0$ и $y^2 > 0$, увек су већи од нуле у сва четири квадранта неког изабраног координатног система. У координатном систему xy ће бити:
$I_x > 0, I_y > 0$

Димензија аксијалног момента инерције је дужина на четврти $[L^2 \cdot L^2] = [L^4]$, а изражава се у јединицама $[m^4, cm^4]$.



Слика 2.7 Геометријске карактеристике попречног пресека

2.4.2 Центрифугални момент инерције попречног пресека (за пар међусобно управних оса)

Центрифугални момент инерције површине представља збир производа, по целој површини, свих елементарних површина и њихових растојања од одговарајућих оса у равни те површине:

$$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA$$

Центрифугални момент инерције може бити мањи, већи или једнак нули ($I_{xy} < 0$, $I_{xy} > 0$, $I_{xy} = 0$).

Димензија центрифугалног момента инерције је дужина на четврти $[L \cdot L \cdot L^2] = [L^4]$, а изражава се у јединицама $[m^4, cm^4]$.

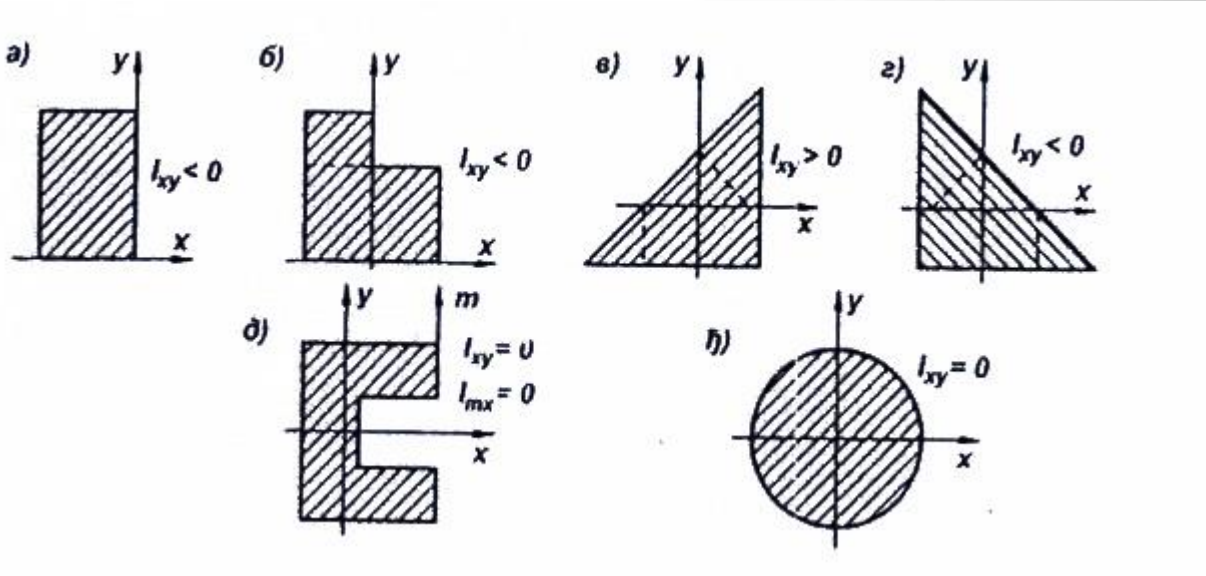
Знак центрифугалног момента инерције зависи од положаја попречног пресека у односу на координатни истем:

у првом и трећем квадранту $I_{xy} > 0$,
у другом и четвртом квадранту $I_{xy} < 0$.

2.4.2 Центрифугални момент инерције попречног пресека (за пар међусобно управних оса)

У великом броју случајева знак центрифугалног момента можемо да одредимо посматрањем слике попречног пресека, простим поништавањем центрифугалних момената истих делова површина, а супротног знака.

Уколико попречни пресек **има бар једну осу симетрије**, може закључити да је центрифугални момент инерције за ту површину и за тај пар оса једнак нули.



Слика 2.8 Одређивање знака центрифугалног момента инерције

2.4.3 Поларни момент инерције попречног пресека (за тачку O – пол O, то јест за осу z управну на раван xy)

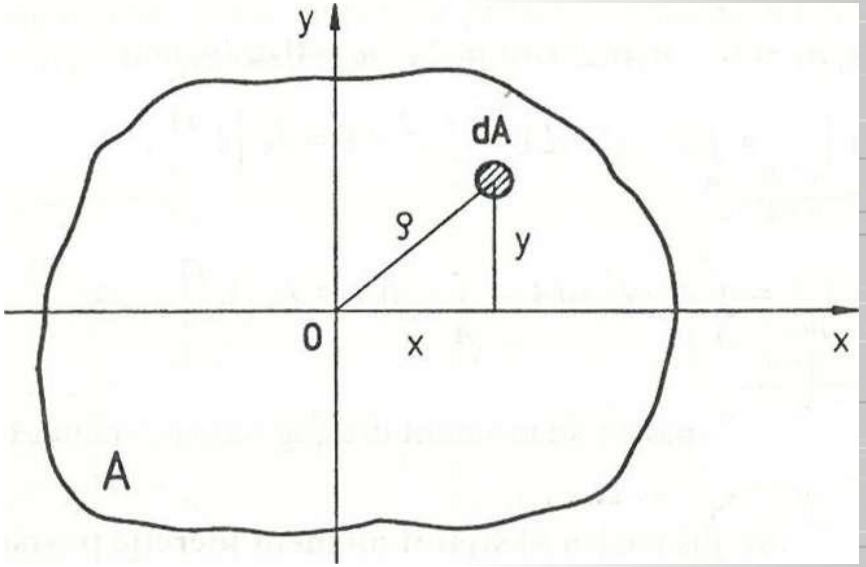
Поларни момент инерције површине у односу на пол O у равни те површине представља збир производа, по целој површини, свих елементарних површина и квадрата њихових растојања од тог пола.

$$I_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_O = I_x + I_y$$



Слика 2.9 Геометријске карактеристике попречног пресека

2.4.3 Поларни момент инерције попречног пресека (за тачку O – пол O, то јест за осу z управну на раван xy)

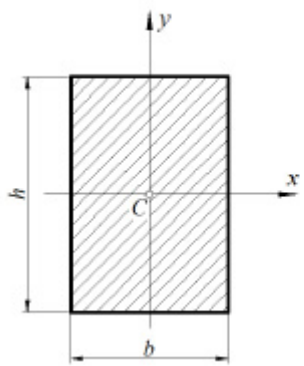
Поларни момент инерције је увек већи од нуле ($I_O > 0$) у сва четири квадранта неког изабраног координатног система.

Поларни момент инерције је инваријантна величина и једнак је збиру два аксијална момента инерције за било који пар ортогоналних оса које пролазе кроз исти пол O.
Поларни момент инерције је величина која не зависи од координатног система, јер је свеједно да ли смо кроз пол O провукли координатни систем xy или uv:

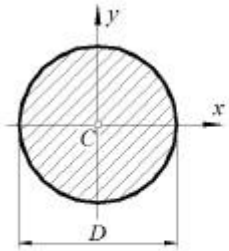
$$I_O = I_x + I_y = I_u + I_v$$

Димензија поларног момента инерције је дужина на четврти $[L^2 \cdot L^2] = [L^4]$, а изражава се у јединицама $[m^4, cm^4]$.

2.4.4 Моменти инерције раванских фигура

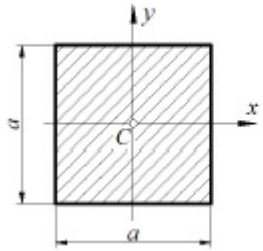


$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

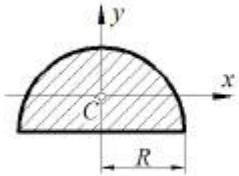


$$I_x = I_y = \frac{D^4 \cdot \pi}{64} \approx \frac{D^4}{20}$$

$$I_o = \frac{D^4 \cdot \pi}{32} \approx \frac{D^4}{10}$$

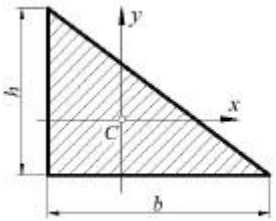


$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$



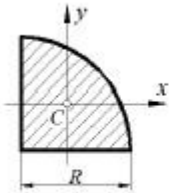
$$I_x = \frac{(9 \cdot \pi^2 - 64) \cdot R^4}{72 \cdot \pi} \approx 0{,}1094 \cdot R^4$$

$$I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \approx 0{,}3925 \cdot R^4$$



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \qquad I_y = \frac{b^3 \cdot h}{36}$$

$$I_{xy} = \left|\frac{b^2 \cdot h^2}{72}\right|$$



$$I_x = I_y = \frac{(9 \cdot \pi^2 - 64) \cdot R^4}{144 \cdot \pi} \approx 0{,}05488 \cdot R^4$$

$$I_{xy} = \left|\frac{(9 \cdot \pi - 32) \cdot R^4}{72 \cdot \pi}\right| \approx |0{,}01647 \cdot R^4|$$

2.5 Геометријске карактеристике сложених површина

Површина попречног пресека се најчешће може приказати као сложена површина која је састављена од више мањих делова. Тако се за неку сложену површину која има n делова, геометријске карактеристике могу израчунати на следећи начин:

$$A = \int_A dA = \int_{A_1} \ldots + \int_{A_2} \ldots + \cdots = A(1) + A(2) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} A(i)$$

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_{A_1} \ldots + \int_{A_2} \ldots + \cdots = S_x(1) + S_x(2) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} S_x(i)$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA = \int_{A_1} \ldots + \int_{A_2} \ldots + \cdots = S_y(1) + S_y(2) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} S_y(i)$$

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{A_1} \ldots + \int_{A_2} \ldots + \cdots = I_x(1) + I_x(2) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} I_x(i)$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_{A_1} \ldots + \int_{A_2} \ldots + \cdots = I_y(1) + I_y(2) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} I_y(i)$$

2.5 Геометријске карактеристике сложених површина

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = \int_{A_1} \dots + \int_{A_2} \dots + \cdots = I_{xy}(1) + I_{xy}(2) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} I_{xy}(i)$$

$$I_O = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_{A_1} \dots + \int_{A_2} \dots + \cdots = I_O(1) + I_O(2) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} I_O(i)$$

Укупна површина попречног пресека једнака је збиру елементарних површина од којих се она састоји.

Статички момент за сложену површину једнак је збиру статичких момената елементарних површина.

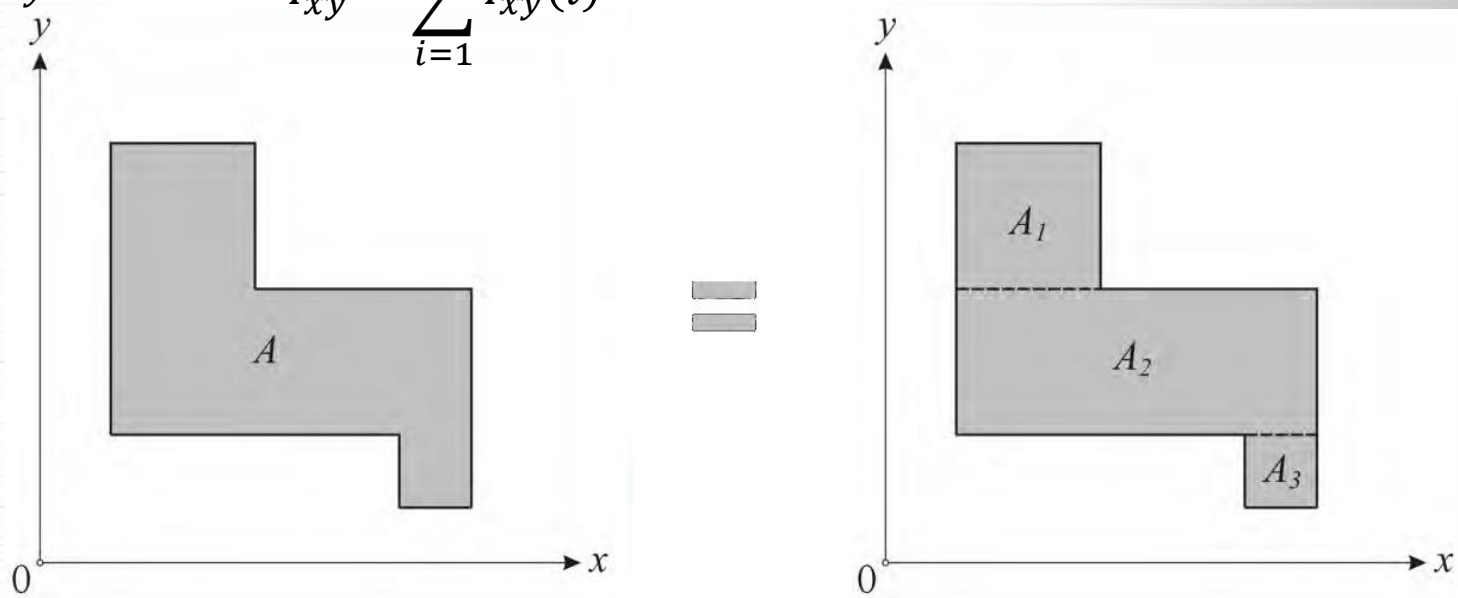
Момент инерције за сложену површину једнак је збиру момената инерције елементарних површина.

2.5 Геометријске карактеристике сложених површина

$$A = \sum_{i=1}^{3} A(i) \qquad I_x = \sum_{i=1}^{3} I_x(i)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{3} S_x(i) \qquad I_y = \sum_{i=1}^{3} I_y(i) \qquad I_O = \sum_{i=1}^{3} I_O(i)$$

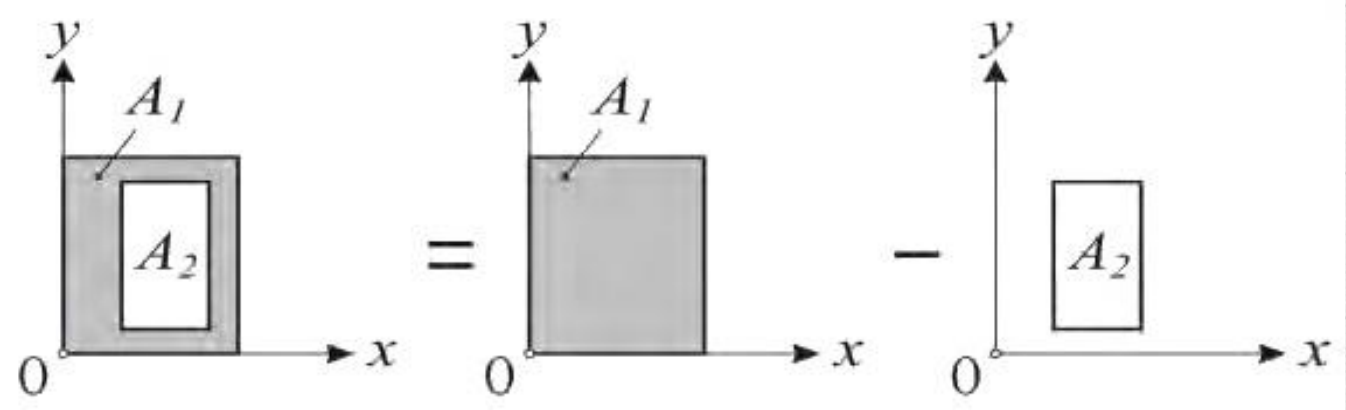
$$S_y = \sum_{i=1}^{3} S_y(i) \qquad I_{xy} = \sum_{i=1}^{3} I_{xy}(i)$$



Слика 2.10 Пример сложеног попречног пресека површине А

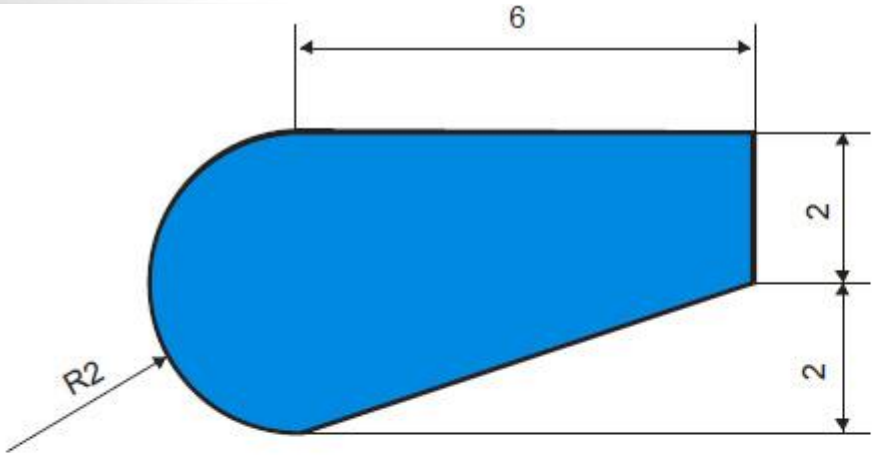
2.5 Геометријске карактеристике сложених површина

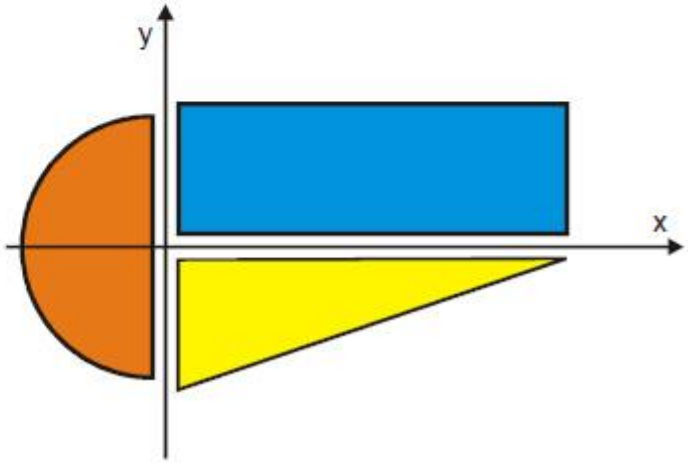
$$A = A_1 - A_2$$
$$S_x = S_{x1} - S_{x2}$$
$$S_y = S_{y1} - S_{y2}$$
$$I_x = I_{x1} - I_{x2}$$
$$I_y = I_{y1} - I_{y2}$$
$$I_{xy} = I_{xy1} - I_{xy2}$$
$$I_O = I_{O1} - I_{O2}$$



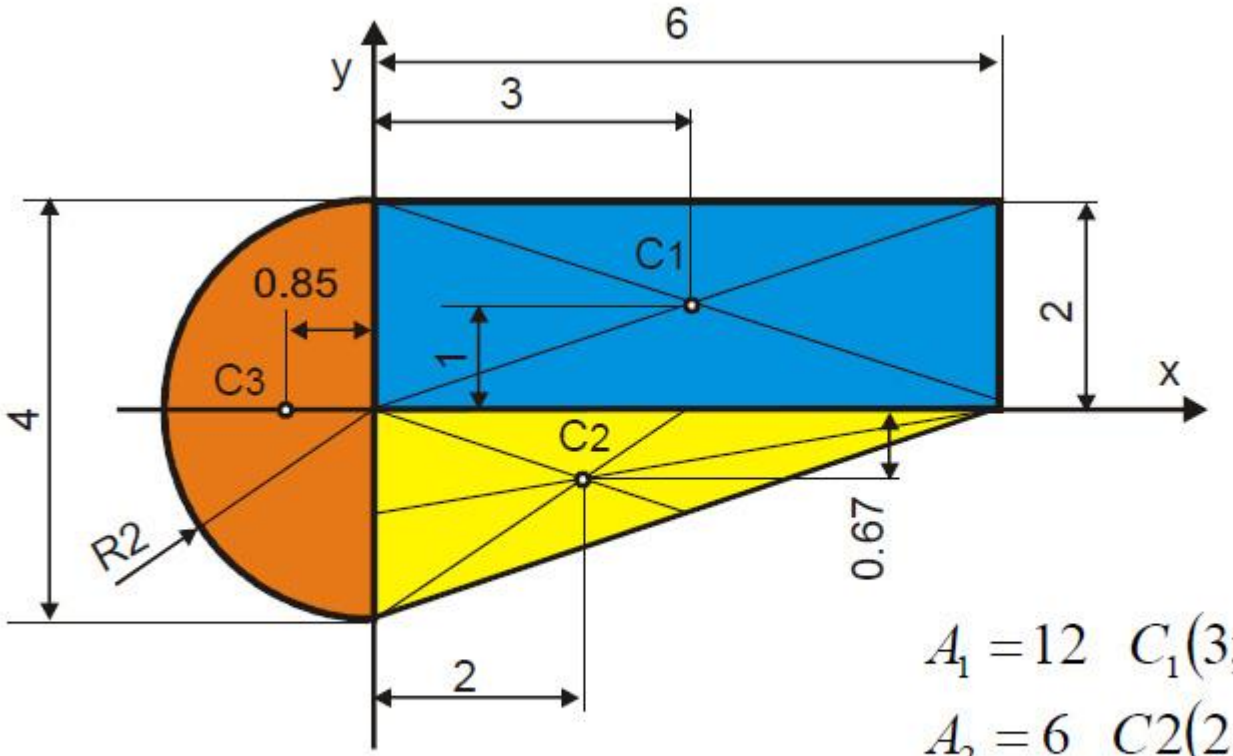
Слика 2.11 Пример ослабљеног попречног пресека

2.5 Геометријске карактеристике сложених површина





2.5 Геометријске карактеристике сложених површина



$$A_1 = 12 \quad C_1(3;1)$$

$$A_2 = 6 \quad C2(2;-0.67)$$

$$A_3 = 6{,}28 \quad C_1(-0.85;0)$$

2.5 Геометријске карактеристике сложених површина

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 12 + 6 + 6.28 = 24{,}28\ cm^2$$

$$S_{x1} = A_1 y_1 = 12 \cdot 1 = 12\, cm^3 \qquad S_{y1} = A_1 x_1 = 12 \cdot 3 = 36\, cm^3$$

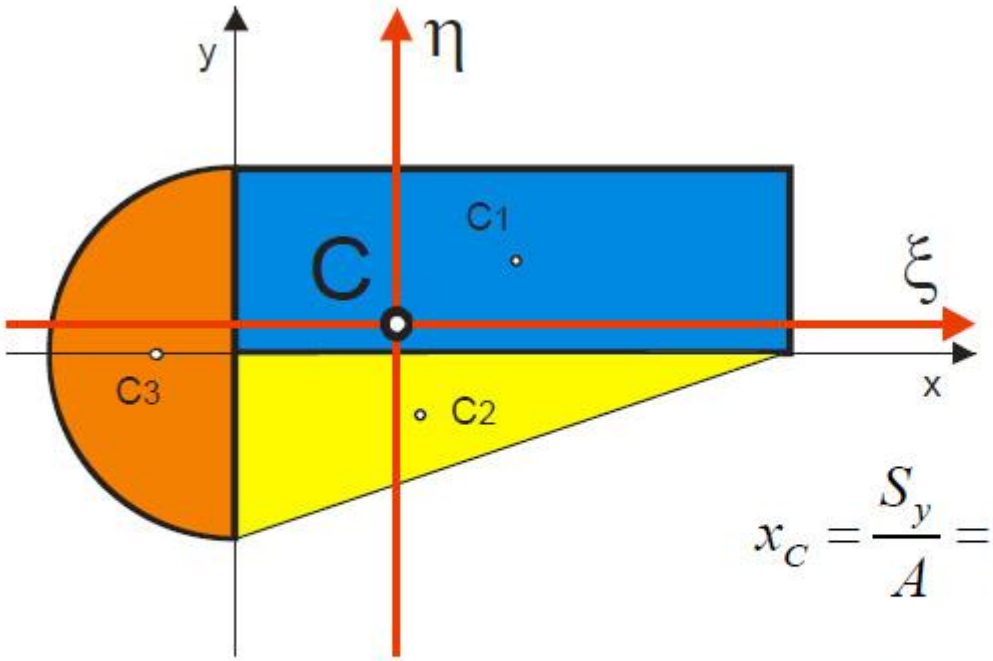
$$S_{x2} = A_2 y_2 = 6 \cdot (-0.67) = -4.02\, cm^3 \qquad S_{y2} = A_2 x_2 = 6 \cdot 2 = 12\ cm^3$$

$$S_{x3} = A_3 y_3 = 6.28 \cdot 0 = 0\, cm^3 \qquad S_{y3} = A_3 x_3 = 6.28 \cdot (-0.85) = -5.34\, cm^3$$

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} + S_{x3} = 12 - 4.02 + 0 = 7.98\, cm^3$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} = 36 + 12 - 5.34 = 42.66\, cm^3$$

2.5 Геометријске карактеристике сложених површина



$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{42.66}{24.28} = 1.75\,cm$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{7.98}{24.28} = 0.32\,cm$$

2.6 Општи израз за геометријске карактеристике попречних пресека

Претходно дефинисани изрази за геометријске карактеристике попречних пресека могу се написати и на следећи начин:

$$A = \int_A x^0 \cdot y^0 \cdot dA$$

$$S_x = \int_A x^0 \cdot y^1 \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x^1 \cdot y^0 \cdot dA$$

$$I_x = \int_A x^0 \cdot y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot y^0 \cdot dA$$

$$I_{xy} = \int_A x^1 \cdot y^1 \cdot dA$$

2.6 Општи израз за геометријске карактеристике попречних пресека

Општи израз за геометријску карактеристику попречног пресека се може написати у облику интеграла:

$$J = \int_A x^m \cdot y^n \cdot dA, \qquad m, n = 0,1,2$$

где се величина J може назвати моментом $(m+n)$ - тог реда попречног пресека.

Уопштено:

површина пресека - момент нултог реда ($m = 0$, $n = 0$),
статички момент - момент првог реда ($m = 1$, $n = 0$ или $m = 0$, $n = 1$),
момент инерције - момент другог реда ($m = 2$, $n = 0$ или $m = 0$, $n = 2$ или $m = 1$, $n = 1$).

2.7 Промена момената инерције при трансформацији координатног система

На основу дефиниција момената инерције очигледно је да ће при **трансформацији координатног система** (транслација или ротација координатног система) доћи до **промене величине момената инерције**.

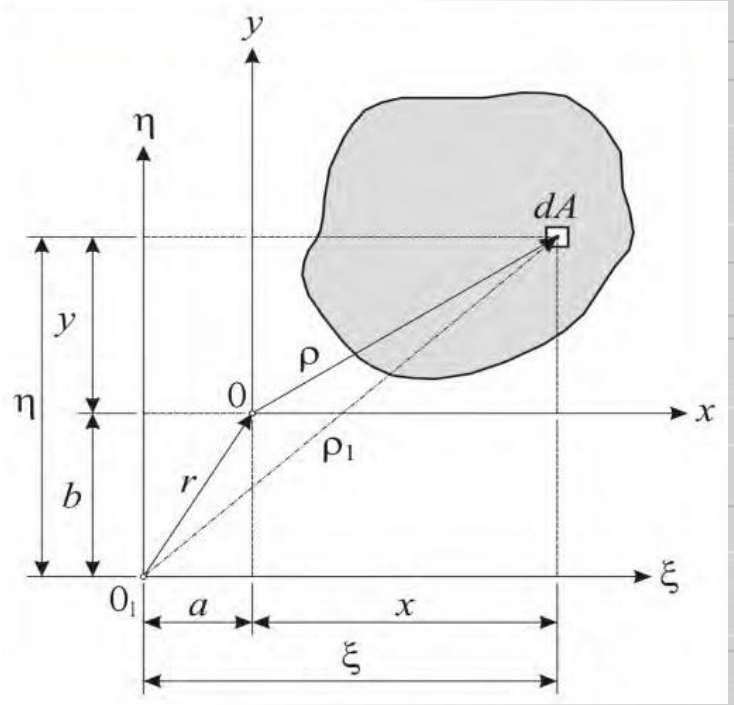
2.7.1 Транслација координатног система

Ако су моменти инерције I_x, I_y, I_{xy} познати за неки произвољно изабрани координатни систем xOy и ако је позната површина попречног пресека A, потражимо моменте инерције I_ξ, I_η, $I_{\xi\eta}$ за неки други пар оса ξ и η које су паралелно померене у односу на систем xOy.

Са слике се види да се веза између ова два координатна система може успоставити као:

$$\xi = a + x$$
$$\eta = b + y$$

где су a и b координате тачке O у систему $\xi O_1 \eta$.



Слика 2.12 Промена момента инерције при транслацији координатног система

2.7.1 Транслација координатног система

По дефиниције аксијални и центрифугални моменти инерције биће:

$$I_\xi = \int_A \eta^2 \cdot dA$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 \cdot dA$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta \cdot dA$$

Коришћењем претходних израза добија се:

$$I_\xi = \int_A (b+y)^2 \cdot dA = \int_A (b^2 + 2 \cdot b \cdot y + y^2) \cdot dA$$

$$= \int_A b^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot b \cdot y \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA$$

$$= b^2 \int_A dA + 2 \cdot b \int_A y \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = b^2 \cdot A + 2 \cdot b \cdot S_x + I_x$$

2.7.1 Транслација координатног система

$$I_\eta = \int_A (a+x)^2 \cdot dA = \int_A (a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2) \cdot dA$$

$$= \int_A a^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot a \cdot x \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA$$

$$= a^2 \int_A dA + 2 \cdot a \int_A x \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA = a^2 \cdot A + 2 \cdot a \cdot S_y + I_y$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A (a+x)(b+y) \cdot dA = \int_A (a \cdot b + a \cdot y + b \cdot x + x \cdot y) \cdot dA$$

$$= \int_A a \cdot b \cdot dA + \int_A a \cdot y \cdot dA + \int_A b \cdot x \cdot dA + \int_A x \cdot y \cdot dA$$

$$= a \cdot b \int_A dA + a \int_A y \cdot dA + b \int_A x \cdot dA + \int_A x \cdot y \cdot dA$$

$$= a \cdot b \cdot A + a \cdot S_x + b \cdot S_y + I_{xy}$$

2.7.1 Транслација координатног система

$$I_\xi = I_x + A \cdot b^2 + 2b \cdot S_x$$
$$I_\eta = I_y + A \cdot a^2 + 2a \cdot S_y$$
$$I_{\xi\eta} = I_{xy} + A \cdot a \cdot b + a \cdot S_x + b \cdot S_y$$

За поларни момент инерције биће:

$$I_{O1} = \int_A \rho_1^2 \cdot dA$$

$$I_{O1} = I_\xi + I_\eta = I_x + A \cdot b^2 + 2b \cdot S_x + I_y + A \cdot a^2 + 2a \cdot S_y$$
$$= I_x + I_y + A(a^2 + b^2) + 2\left(a \cdot S_y + b \cdot S_x\right)$$

$$I_{O1} = I_O + A \cdot r^2 + 2\left(a \cdot S_y + b \cdot S_x\right)$$

2.7.1 Транслација координатног система

Уколико је координатни систем (xOy) тежишни, тада су статички моменти једнаки нули $(S_x = 0, S_y = 0)$, па се изрази за моменте инерције упрошћавају и постају:

$$I_\xi = I_x + A \cdot b^2$$
$$I_\eta = I_y + A \cdot a^2$$
$$I_{\xi\eta} = I_{xy} + A \cdot a \cdot b$$
$$I_{O1} = I_O + A \cdot r^2$$

У том случају је:

$$a = \xi_C$$
$$b = \eta_C$$

па претходни изрази постају:

$$I_\xi = I_x + A \cdot \eta_C^2$$
$$I_\eta = I_y + A \cdot \xi_C^2$$
$$I_{\xi\eta} = I_{xy} + A \cdot \xi_C \cdot \eta_C$$
$$I_{O1} = I_O + A \cdot r^2$$

2.7.1 Транслација координатног система

Изрази за моменте инерције у овом облику су познати као **Штајнерови обрасци** (*Jakub Steiner, 1798-1863*, швајцарски математичар).
Моменти инерције I_x, I_y, I_{xy}, I_O се називају **тежишни (сопствени) моменти инерције**, а величине $A \cdot \eta_C^2$, $A \cdot \xi_C^2$, $A \cdot \xi_C \cdot \eta_C$, $A \cdot r^2$ - **положајни моменти инерције**.

Штајнерова теорема: Момент инерције за произвољну осу, једнак је збиру момента инерције за тежишну осу (која је паралелна тој произвољној оси) и положајног момента инерције.

$$
\begin{array}{ccccc}
I_\xi & = & I_x & + & A \cdot \eta_C^2 \\
I_\eta & = & I_y & + & A \cdot \xi_C^2 \\
I_{\xi\eta} & = & I_{xy} & + & A \cdot \xi_C \cdot \eta_C \\
I_{O1} & = & I_O & + & A \cdot r^2 \\
 & & \text{тежишни (сопствени)} & & \text{положајни}
\end{array}
$$

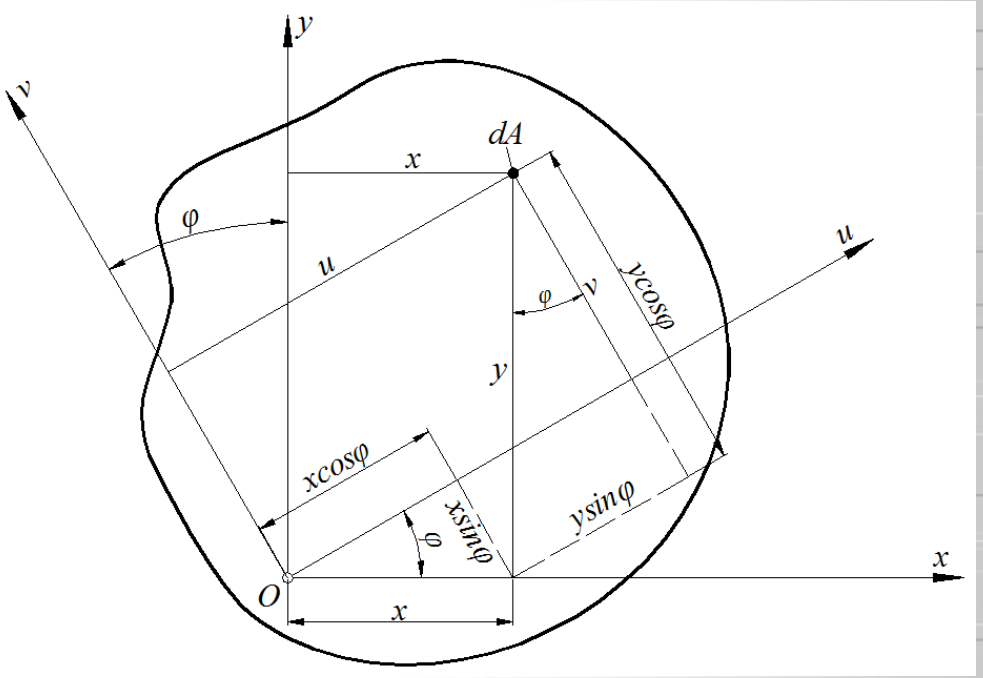
Из Штајнерових образаца је јасно да је аксијални момент инерције за тежишну осу увек мањи од момента инерције за било коју другу осу паралелну тежишној.

2.7.2 Ротација координатног система

Нека су моменти инерције I_x, I_y, I_{xy}, неке површине A, за систем оса x, y познати. Потражимо у том случају вредности момената инерције I_u, I_v, I_{uv}, за пар оса u, v које су добијене ротацијом оса x, y за неки угао φ.

Веза између координата два координатна система са истим координатним почетком у тачки O, а који су заокренути за угао φ један у односу на други, дата је у облику:

$$u = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi$$
$$v = -x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$$



Слика 2.13 Промена момената инерције при ротацији координатног система

2.7.2 Ротација координатног система

По дефиницији, биће:

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA \qquad I_v = \int_A u^2 \cdot dA$$

$$I_{uv} = \int_A uv \cdot dA$$

па се коришћењем претходних израза за везу координата два координатна система добија:

$$I_u = \int_A (-x \cdot sin\,\varphi + y \cdot cos\,\varphi)^2 \cdot dA$$

$$= \int_A (x^2 \cdot sin^2\varphi - 2 \cdot x \cdot y \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi + y^2 \cdot cos^2\varphi) \cdot dA =$$

$$\int_A sin^2\varphi \cdot x^2 \cdot dA + \int_A cos^2\varphi \cdot y^2 \cdot dA - \int_A 2 \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi \cdot x \cdot y \cdot dA$$

$$= sin^2\varphi \int_A x^2 \cdot dA + cos^2\varphi \int_A y^2 \cdot dA - 2 \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi \int_A x \cdot y \cdot dA$$

2.7.2 Ротација координатног система

$$I_v = \int_A (x \cdot cos\,\varphi + y \cdot sin\,\varphi)^2 \cdot dA$$

$$= \int_A (x^2 \cdot cos^2\varphi + 2 \cdot x \cdot y \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi + y^2 \cdot sin^2\varphi) \cdot dA$$

$$= \int_A cos^2\varphi \cdot x^2 \cdot dA + \int_A sin^2\varphi \cdot y^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi \cdot x \cdot y \cdot dA$$

$$= cos^2\varphi \int_A x^2 \cdot dA + sin^2\varphi \int_A y^2 \cdot dA + 2 \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi \int_A x \cdot y \cdot dA$$

2.7.2 Ротација координатног система

$$I_{uv} = \int_A (x \cdot cos\,\varphi + y \cdot sin\,\varphi)(-x \cdot sin\,\varphi + y \cdot cos\,\varphi) \cdot dA$$

$$= \int_A (-x^2 \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi + x \cdot y \cdot cos^2\,\varphi - x \cdot y \cdot sin^2\,\varphi$$

$$+ y^2 \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi) \cdot dA$$

$$= -\,sin\,\varphi\, cos\,\varphi \int_A x^2 \cdot dA + (cos^2\varphi -\cdot sin^2\,\varphi) \int_A x \cdot y \cdot dA$$

$$+ sin\,\varphi\, cos\,\varphi \int_{Aa} y^2 \cdot dA$$

2.7.2 Ротација координатног система

$$I_u = I_x \cdot cos^2\,\varphi + I_y \cdot sin^2\varphi - 2 \cdot I_{xy} \cdot sin\,\varphi \cdot cos\,\varphi$$
$$I_v = I_x \cdot sin^2\,\varphi + I_y \cdot cos^2\varphi + 2 \cdot I_{xy} \cdot sin\,\varphi \cdot cos\,\varphi$$
$$I_{uv} = \left(I_x - I_y\right) \cdot sin\,\varphi\, cos\,\varphi + I_{xy} \cdot (cos^2\varphi -\cdot sin^2\,\varphi)$$

Коришћењем образаца: $sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\varphi}{2}}$ $\quad cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\varphi}{2}}$

$$sin\varphi = \sqrt{\frac{1-cos2\varphi}{2}} \qquad cos\varphi = \sqrt{\frac{1+cos2\varphi}{2}}$$
$$sin^2\varphi = \frac{1-cos2\varphi}{2} \qquad cos^2\varphi = \frac{1+cos2\varphi}{2}$$

$$sin2\varphi = 2 \cdot sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

Добијају се изрази за аксијалне и центрифугалне моменте инерције попречног пресека, за осе заротираног координатног система:

2.7.2 Ротација координатног система

$$I_u = I_x \frac{1 + cos2\varphi}{2} + I_y \frac{1 - cos2\varphi}{2} - 2 \cdot I_{xy} \cdot sin\,\varphi \cdot cos\,\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot I_x + \frac{1}{2} \cdot I_x \cdot cos2\varphi + \frac{1}{2} \cdot I_y - \frac{1}{2} \cdot I_y \cdot cos2\varphi - I_{xy} \cdot sin2\varphi$$

$$I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(I_x - I_y\right) \cdot cos2\varphi - I_{xy} \cdot sin2\varphi$$

$$I_v = I_x \frac{1 - cos2\varphi}{2} + I_y \frac{1 + cos2\varphi}{2} + 2 \cdot I_{xy} \cdot sin\,\varphi \cdot cos\,\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot I_x - \frac{1}{2} \cdot I_x \cdot cos2\varphi + \frac{1}{2} \cdot I_y + \frac{1}{2} \cdot I_y \cdot cos2\varphi + I_{xy} \cdot sin2\varphi$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(I_x - I_y\right) \cdot cos2\varphi + I_{xy} \cdot sin2\varphi$$

$$I_{uv} = \left(I_x - I_y\right) \cdot \frac{sin2\varphi}{2} + I_{xy} \cdot \left(\frac{1 + cos2\varphi}{2} - \frac{1 - cos2\varphi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) sin2\varphi + I_{xy} \cdot \left(\frac{1 + cos2\varphi - 1 + cos2\varphi}{2}\right)$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) sin2\varphi + I_{xy} \cdot cos2\varphi$$

2.7.2 Ротација координатног система

$$I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot cos2\varphi - I_{xy}\cdot sin2\varphi$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot cos2\varphi + I_{xy}\cdot sin2\varphi$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)sin2\varphi + I_{xy}\cdot cos2\varphi$$

Поларни момент инерције биће:

$$I_O = I_u + I_v$$
$$= I_x\cdot cos^2\,\varphi + I_y\cdot sin^2\varphi - 2\cdot I_{xy}\cdot sin\,\varphi\cdot cos\,\varphi + I_x\cdot sin^2\,\varphi + I_y\cdot cos^2\varphi$$
$$+\quad 2\cdot I_{xy}\cdot sin\,\varphi\cdot cos\,\varphi = I_x(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + I_y(cos^2\varphi + sin^2\varphi)$$

$$I_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

Збир аксијалних моментата инерције равне фигуре у односу на две координатне осе је непроменљив при ротацији осе за неки угао.

2.8 Главни тежишни моменти инерције

Из последњих израза за моменте инерције I_u и I_v очигледно је да се они мењају у зависности од угла φ, па се поставља питање којим вредностима угла φ одговарају екстремне вредности аксијалних момената инерције.

$$I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot cos2\varphi - I_{xy}\cdot sin2\varphi$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot cos2\varphi + I_{xy}\cdot sin2\varphi$$

Одговор на ово питање се добија из услова екстрема функција I_u и I_v, тј. изједначавањем првих извода ових функција са нулом:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -\left(I_x - I_y\right)sin2\varphi - 2I_{xy}cos2\varphi = 0$$

$$\frac{dI_v}{d\varphi} = \left(I_x - I_y\right)sin2\varphi + 2I_{xy}cos2\varphi = 0$$

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = \frac{dI_v}{d\varphi}$$

2.8 Главни тежишни моменти инерције

Вредност угла φ при којој функције I_u и I_v имају екстремне вредности добија се као решење претходних једначина.

Ако ову вредност промељиве обележимо са ознаком α имаћемо:

$$tg2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

С обзиром да се други и први изводи функција изводи функција I_u и I_v разликују само по знаку, то ће вредности $\varphi = \alpha$ одговарати максимуму једног а минимуму другог момента инерције.

Како је

$$tg(2\alpha + \pi) = tg2\alpha$$

$$tg\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] = tg2\alpha$$

очигледно је да се екстремне вредности момената инерције добијају за координатне осе које су заротиране за вредност угла α у односу на почетни координатни систем $x0y$.

2.8 Главни тежишни моменти инерције

Заротирани правци координатних оса за које се добијају екстремне вредности момената инерције називају се главне осе инерције површине, а аксијални моменти инерције зову се главни моменти инерције.

Ако потражимо и друге изводе функција I_u и I_v добијамо:

$$\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} = -\frac{d^2 I_v}{d\varphi^2} = -2\left(I_x - I_y\right)cos2\varphi + 4I_{xy}sin2\varphi$$

$$= -2cos2\alpha\left[\left(I_x - I_y\right) - 2I_{xy}\frac{sin2\alpha}{cos2\alpha}\right]$$

$$= -2cos2\alpha\left[\left(I_x - I_y\right) - 2I_{xy}\cdot\frac{-2\cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right] = -2\left[\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2\right]\frac{cos2\alpha}{I_x - I_y}$$

2.8 Главни тежишни моменти инерције

За $I_x > I_y$

$$\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} < 0 \Longrightarrow I_u(\varphi = \alpha) = I_{max}$$

$$\frac{d^2 I_v}{d\varphi^2} > 0 \Longrightarrow I_v(\varphi = \alpha) = I_{min}$$

Ово значи да у случају када је $I_x > I_y$, ротацијом за вредност угла α оса x постаје оса за коју је момент инерције највећи и обрнуто.

Како је:

$$sin\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1 + tg^2\beta}}$$

$$cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta}}$$

$$tg2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

2.8 Главни тежишни моменти инерције

$$sin2\alpha = \frac{-\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)^2}} = \frac{\frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}}{\sqrt{\frac{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}{\left(I_x - I_y\right)^2}}} = \frac{\frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}}{\frac{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}{I_x - I_y}}$$

$$sin2\alpha = \frac{-2 \cdot I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$cos2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}{\left(I_x - I_y\right)^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}{I_x - I_y}}$$

$$cos2\alpha = \frac{I_x - I_y}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

2.8 Главни тежишни моменти инерције

Заменом овако израчунатих вредности за $sin2\alpha$ и $cos2\alpha$ у изразе за аксијалне и центрифугални момент инерције пресека за осе заротираног координатног система:

$$I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot cos2\varphi - I_{xy}\cdot sin2\varphi$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot cos2\varphi + I_{xy}\cdot sin2\varphi$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)sin2\varphi + I_{xy}\cdot cos2\varphi$$

добија се:

$$I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot\frac{I_x - I_y}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}} - I_{xy}\cdot\frac{-2\cdot I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

2.8 Главни тежишни моменти инерције

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(I_x - I_y\right)\cdot\frac{I_x - I_y}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}} + I_{xy}\cdot\frac{-2\cdot I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}$$

2.8 Главни тежишни моменти инерције

$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\frac{-2 \cdot I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}} + I_{xy} \cdot \frac{I_x - I_y}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$= \frac{-\left(I_x - I_y\right) \cdot I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}} + \frac{\left(I_x - I_y\right) \cdot I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$I_{uv} = 0$$

Дакле у случају када је $I_x > I_y$ имали би:

$$I_u(\varphi)|\varphi = \alpha = I_{max} = I_1$$

$$I_v(\varphi)|\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2} = I_{min} = I_2$$

$$I_{uv}(\varphi)|\varphi = \alpha = I_{12} = 0$$

За $\varphi = \alpha$ центрифугални момент инерције једнак је нули.

Осе 1 и 2 називају се **главним осама инерције**, а одговарајући моменти инерције **главним моментима инерције**.

2.8 Главни тежишни моменти инерције

Уколико је координатни почетак у тежишту (центру) попречног пресека, осе 1 и 2 називају се **главне тежишне (централне) осе инерције**, а моменти инерције I_1 и I_2 су **главни тежишни (централни) моменти инерције**.

Главни тежишни координатни систем је онај тежишни координатни систем за чији је пар оса **центрифугални момент инерције једнак нули**, а **аксијални моменти инерције имају екстремне вредности**.

Раније смо закључили да, ако нека површина има бар једну осу симетрије, онда је за пар оса, од којих је бар једна оса - оса симетрије, вредност **центрифугалног момента инерције једнака нули**. То значи да је та оса у исто време и **главна** тежишна оса пресека. Овај закључак нам може олакшати поступак одређивања праваца главних оса инерције.

2.8.1 Полупречници инерције

Полупречник инерције за неку осу је величина дефинисана изразом:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Ова величина за осе x и y има облик:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

2.8.1 Полупречници инерције

За било коју коју осу u полупречник инерције има вредност:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}$$

За главне тежишне осе полупречници инерције имају вредност:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = i_{max}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = i_{min}$$

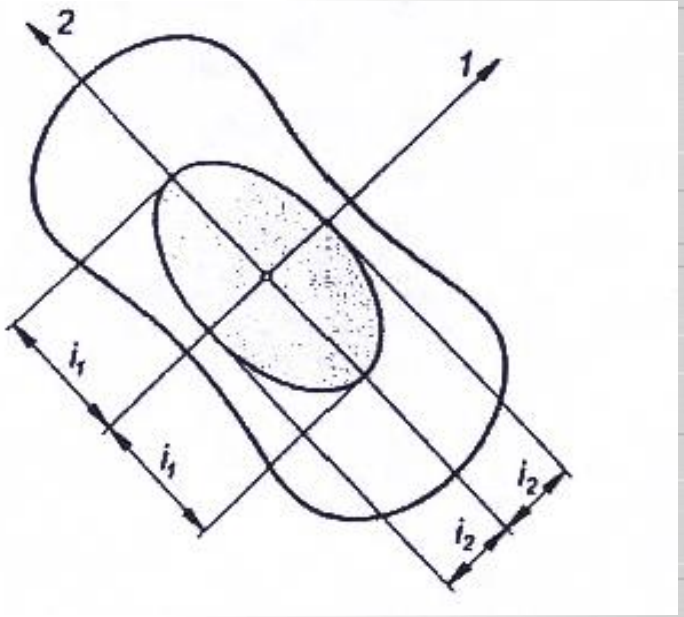
2.8.2 Елипса инерције

Елипса инерције је елипса дефинисана једначином:

$$\frac{u^2}{i_2^2} + \frac{v^2}{i_1^2} = 1$$

Елипса прати облик контуре попречног пресека, односно простире се у правцу простирања површине попречног пресека.

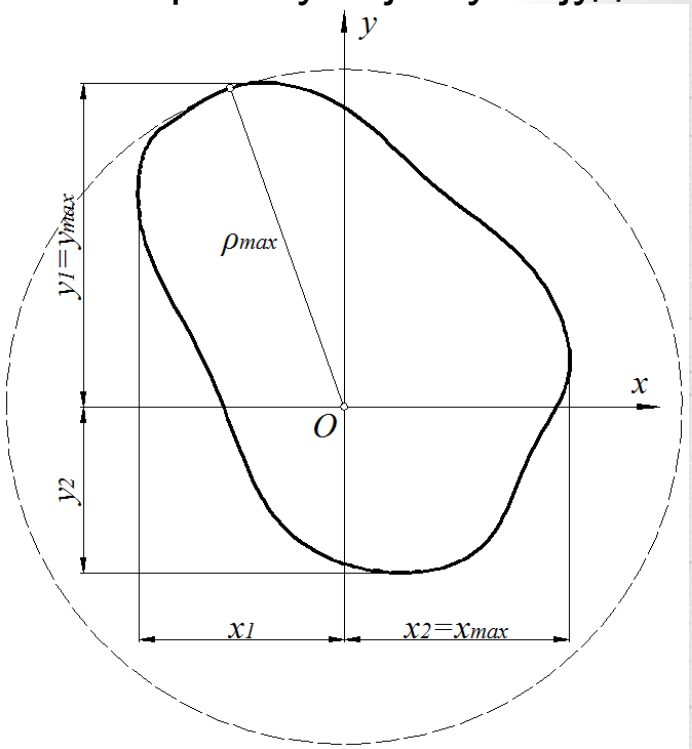
Елипсу инерције конструишемо тако што се полупречник инерције i_1 наноси на осу 2, а полупречник инерције i_2 на осу 1.



Слика 2.14 Елипса инерције попречног пресека

2.9. Отпорни момент

У каснијем раду ћемо наилазити на још једну величину која се може назвати геометријском карактеристиком попречног пресека, пошто ће нам од великог значаја бити тачке у попречном пресеку које су најудаљеније од тежишних оса x, y.



Слика 2.15 Растојања најудаљенијих тачака од координатних оса и пола

2.9. Отпорни момент

Отпорни момент попречног пресека у односу на осу која лежи у равни тог пресека дефинише се као количник аксијалног момента инерције у односу на ту осу и растојања најудаљеније тачке тог пресека од осе:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}}$$

где су x_{max} и y_{max} растојања најудаљенијих тачака површине попречног пресека од осе.

Поларни отпорни момент попречног пресека у односу на центар (пол) који лежи у равни тог пресека дефинише се као количник поларног момента инерције у односу на тај центар и растојања центра до најудаљеније тачке површине пресека:

$$W_O = \frac{I_O}{\rho_{max}}$$

где је ρ_{max} растојање најудаљеније тачке површине фигуре од центра O.

2.9. Отпорни момент

Димензија отпорног момента инерције је дужина на трећи $[L^3]$, а изражава се у јединицама $[m^3, cm^3]$.

Имајући у виду да је:

$$I_x = I_x(1) + I_x(2) + \cdots + I_x(n) = \sum_{i=1}^{n} I_x(i)$$

то се не сме рећи и за отпорни момент, јер:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{I_x(1) + I_x(2) + \cdots + I_x(n)}{y_{max}} \neq W_x(1) + W_x(2) + \cdots + W_x(n)$$

$$W_x \neq \sum_{i=1}^{n} W_x(i)$$