Комбинаторика

1. На вечеру су дошли Ивица, Марица, вештица, Снежана, Пепељуга, седам патуљака и принц на белом коњу. На колико начина могу сести око округлог стола тако да Снежана и Пепељуга седе крај принца, а Ивица и Марица не седе крај вештице (не морају седети једно поред другог)?
(Битан је само међусобни положај ликова из бајке. Бели коњ не седи за столом него је привезан за оближње дрво.)

Решење:

Снежана, Пепељуга и принц могу сести на два начина једно поред другог (Снежана-Принц-Пепељуга или Пепељуга-Принц-Снежана) Када они седну једно поред другог више није свеједно где ће седети остали ликови из бајке. Укупно има 10 ! распореда осталих ликова, али и $2\cdot 9!$ да Ивица седи поред Вештице и $2\cdot 9!$ Марица крај Вештице и $2\cdot 8!$ да Ивица и Марица седе крај вештице. Према формули укључивања искључивања „добрих“ распореда осталих ликова има $10!-4\cdot 9!+2\cdot 8!=2257920$. Укупан број „добрих“ распореда свих ликова је $2\cdot 2257920=4515840$.

2. Образац за одговоре на пријемном испиту се састоји од 33 реда (који одговарају задацима) са по 5 квадратића (који одговарају решењима). У сваком задатку треба изабрати једно од 5 понуђених решења, од којих је тачно једно и зацрнити одговарајући квадратић. Неки задаци могу остати без одговора, али није дозвољено зарнити више од једног одговора (квадратића у врсти). Тачно решење доноси 20 поена, нетачно –5 поена, а неозначавање решења 0 поена.

а) Колико укупно има дозвољених попуњавања обрасца (без вишеструких одговора=?

б) Колико има дозвољених попуњавања обрасца који доносе тачно 100 поена?

Решење:

а) У сваком задатку имамо 6 могућности (5 решења и неозначавање). Укупан број могућности је 6^{33}.

б) Сто поена можемо добити на следеће начине:

5 тачно, 0 нетачно, 25 неозначено на $\binom{33}{5}$ начина.

6 тачно, 4 нетачно, 23 незаокружено на $\binom{33}{6}\cdot\binom{27}{4}\cdot 4^4$ начина.

7 тачно, 8 нетачно, 18 незаокружених на $\binom{33}{7}\cdot\binom{26}{8}\cdot 4^8$ начина.

8 тачно, 12 нетачно, 8 неозначено на $\binom{33}{8}\cdot\binom{25}{12}\cdot 4^{12}$ начина.

9 тачно, 20 нетачно, 3 неозначено на $\binom{33}{10}\cdot\binom{23}{20}\cdot 4^{20}$ начина.

Укупно: $\binom{33}{5}+\binom{33}{6}\cdot\binom{27}{4}\cdot 4^4+\binom{33}{7}\cdot\binom{26}{8}\cdot 4^8+\binom{33}{8}\cdot\binom{25}{12}\cdot 4^{12}+\binom{33}{10}\cdot\binom{23}{20}\cdot 4^{20}$ начина.

3. Око округлог стола треба да седе играчи Партизана и Црвене звезде (по 11 из сваке екипе). Играчи треда да седе наизменично Партизан, Звезда, Партизан, Звезда, ...), голмани треба да седу један до гругог, а капитени не смеју седети заједно. На колико начина је то могуће распоредити. (Битан је само релативан положај играча око стола)?

Решење:

Распореди у којима играчи алтернирају а голмани седе заједно је $2\cdot(10!)^2$.

(Голмани седе заједно на два начина, остали играчи Партизана или Звезде се распоређују на 10 ! начина, а $(10!)^2$ по правилу производа једни и други играчи клубова.

(Ово је број распореда у коме голмани седе заједно, играчи алтернирају али и капитени седе заједно).

$2\cdot(10+9)\cdot(9!)^2$.

(9 ! остали играчи без голмана и капитена а $(9!)^2$ по правилу производа распореди играча оба клуба, 2 распореда голмана, (10+9) седају капитени, у истој или супротној орјентацији као голмане)

По принципу комплемента тражени распореда ће бити $2\cdot(10!)^2-2\cdot(10+9)\cdot(9!)^2$.

4. Колико има шестоцифрених бројева са непарним бројем непарних цифара?

Решење:

Први случај – прва цифра да је непарна има 5 могућности (цифре 1, 3, 5, 7, 9), за остала места има по 5 могућности за парне или непарне бројеве.

Ако је прва цифра непарна за остала места можемо изабрати 0, 2 или 4 места за непарне цифре да би број био са непарним бројем непарних цифара (не нужно расзличитих) и за свако то место имамо могућност да изаберем 5 фифара и за парне и непарне бројеве, што даје резултат

$5\cdot\left[\binom{5}{0}+\binom{5}{2}+\binom{5}{4}\right]\cdot 5^5 = 250000$.

Други случај: ако је прва цихра парна (има 4 могућности, без нуле), а остала места у броју могу бити за једно место са непарном цифром, или три места за непарне цифре или 5 места за непарне цифре, а за сваку цифру (парну лили непарну имамо по 5 могућности), што даје резултат:

$4\cdot\left[\binom{5}{1}+\binom{5}{3}+\binom{5}{5}\right]\cdot 5^5 = 200000$. На основу правила збира тражени резултат је 450 000 начина.

5. Унутар квадрата са страницом дужине 4 дате су 33 тачке од којих никоје три нису колинеарне. Докажите да можемо одабрати три задате тачке тако да обим троугла који оне одређују не буде већи од $2+\sqrt{2}$.

Решење:

Поделимо квадрат на 16 јединичних квадрата. По Дирихлеовом принципу бар један јединични квадрат садржи $\left[\frac{33-1}{16}\right]+1=3$ дате тачке. Обим троугла који одређују те три тачке не може бити већи од $2+\sqrt{2}$, што је обим правоуглог троугла чија су темена три темена јединичног квадрата.

6. У рибарници продају шаране и пастрмке и то у три величине: мале, средње и велике. На колико начина можемо купити 10 риба за ручак? Претпостављамо да су све рибе исте величине и исте врсте међусобно једнаке и има их у неограниченим количинама.

Решење

Посматрамо комбинације са понављање из скупа ШВ, ШС, ШМ, ПВ, ПС, ПМ, где ШВ значи риба шаран велика, ШС риба шаран средња, ПМ, риба пастрмка мала. Дакле могућност да купимо 10 риба за ручак има исто као и решења једначине $x_1+x_2+...+x_6=10,\ x_i\in N_0^6$, што је $\binom{10+5}{5}=\binom{15}{5}=3003$.

7. Међу професорима Природно математичког факултета има 15 математичара, 20 физичара, 10 хемичара и 20 биолога. На колико начина се може изабрати шесточлана делегација професора у којој мора бити бар један представник сваке струке?

Решење:

Користећи формулу укључивања искључивања добијамо:

$$\binom{15+20+10+20}{6}-$$

$$-\binom{15+20+10}{6}-\binom{15+20+20}{6}-\binom{15+10+20}{6}-\binom{20+10+20}{6}+$$

$$+\binom{15+20}{6}+\binom{15+10}{6}+\binom{15+20}{6}+\binom{20+10}{6}+\binom{20+20}{6}+\binom{10+20}{6}-$$

$$-\binom{15}{6}-\binom{20}{6}-\binom{10}{6}-\binom{20}{6}$$

Објашњење: $\binom{15+20+10}{6}$ шесточлана делегација без биолога, $\binom{15+20+20}{6}$ без хемичара итд. $\binom{15+20}{6}$ без биолога и хемичара, $\binom{15+10}{6}$ без физичара и хемичара итд. $\binom{15}{6}$ делегација без физичара, хемичара и биолога и тако редом.

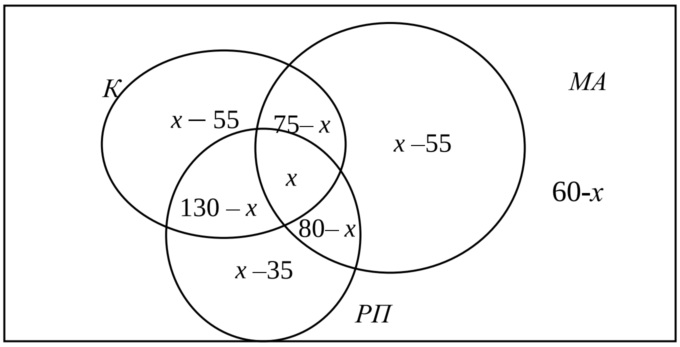
8. Од 200 студената друге године њих 100 је положило Математичку анализу 2, 150 Комбинаторику, 175 Рачунарски практикум 1, Математичку анализу и Комбинаторику положило је 75 студената, Математичку анализу и Рачунарски практикум положило 80 студената, а Комбинаторику и Рачунарски практикум је положило 130 студената.

а) Доказати да највише 5 студената није положило ниједан од наведена три испита.

б) Колико највише, а колико најмање студената је положило сва три испита? (Своје тврдње доказати).

Решење:

а) Ако са x означимо број студената који су положили сва три испита. Тада важи Веног дијаграм.



а) Број студената који су положили само Математичку анализу је $x-55\ge 0$, па је $60-x\le 5$.
што доказује тврдњу.

б) Са Веновог дијаграма видимо да је $55\le x\le 60$.

*** Имамо 6 Негро бонбона и 8 бонбона са лешником. На колико начина можемо дати један или више бонбона сваком од четворо деце? Свако дете мора добити бар један бонбон, али неки бинбони могу остати нераспоређени. Деца су међусобно различита, а бонбони исте врсте једнаки.

Решење:

Нека је A – распореди у којима нека деца не морају добити бонбон. Тада је

$$|A|=\binom{6+4}{4}\cdot\binom{8+4}{4}=103395\ .$$

Негро лешник

Објашњење: Помоћу 4 преграде поделимо бонбоне исте врсте у 5 гомилица, од којих задња гомилица је нераспоређена.

A_i - распореди у којима i то дете не добија бонбон

$$|A_i|=\binom{6+3}{3}\cdot\binom{8+3}{3}=13860\ .$$

$$|A_i\cap A_j|=\binom{6+2}{2}\cdot\binom{8+2}{2}=1260\ .$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{6+1}{1}\cdot\binom{8+1}{1}=63\ .$$

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=1$ Сви бонбони нераспоређени.

Распореди у којима свако дете добија бар један бонбон:

$|A/(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)|=|A|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=$ по формули укључивања искључивања:

$$=|A|-\binom{4}{1}|A_i|+\binom{4}{2}|A_i\cap A_j|-\binom{4}{3}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\binom{4}{4}|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=55819$$

9. Одредите број начина на који могу седети n брачних парова око округлог стола тако да:

(а) мушкарци и жене алтернирају, [*Решење*: $n!\cdot(n-1)!$]

(б) свака жена седи до свог мужа. [*Решње* : $2^n\cdot(n-1)!$] .

10. (Метода куглица и штапића) На колико начина можемо $n \in \mathrm{N}$ једнаких куглица распоредити у $m \in \mathrm{N}$ различитих кутија?

Решење:

●● ⟵ | ⟵ |●● … ⟵ |● … ⟵ ‖ ⟶ ●

Посматрајмо низ куглица и преграда као на горњој слици. Куглице лево од прве преграде припадају првој кутији, куглице између прве и друге преграде другој кутији, итд. куглице након задње преграде задњој кутије. Дакле, имамо низ од n куглица и $m-1$ преграда. Сваки низ одређује тачно један распоред куглица по кутијама. Преграде можемо разместити на

$\binom{n+m-1}{m-1}$ начина начина, што је и одговор на питање задатка.

11. На колико начина можемо распоредити n једнаких куглица у m различитих кутија тако да тачно две кутије остану празне?

Решење:

Прво одаберемо две кутије које ће остати празне – то је могуће на $\binom{m}{2}$ начина. Затим ставимо у сваку од претходних кутија по једну куглицу. Остало нам је $n-m+2$ куглица, које треба распоредити било како у $m-2$ различите кутије. То се може на $\binom{n-m+2+m-2-1}{m-2-1} = \binom{n-1}{m-3}$ начина. На основу правила производа укупан број распореда је $\binom{m}{2} \cdot \binom{n-1}{m-3}$.

12. Скупштина има 151 посланика. Изборни праг (цензус) је прешко 7 странака. Колико има могућих распореда посланичких места у којима ниједна странка нема апсолутну већину?

Решење:

Укупан број распореда посланичких места је једнак броју решења једначине $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 151,\ x_i \in N$ (свих 7 странака је прешло изборни праг, дакле имају бар једног посланика), то јест број решења једначине је $\binom{n+m-1}{m-1}, n = 151,\ m = 7$.

13. Комисија од 5 чланова бира најбољу од 50 Веб страница. Сваки члан комисије прегледа и оцењује 20 Веб страница, а сваку страницу прегледају два члана жирија.

а) Докажите да постоје два члана комисије који заједно прегледају бар 5 Веб страница.

б) Може ли се постићи да свака два члана комисије заједно прегледају тачно 5 Веб страница?

Решење:

а) Коришћењем Дирихлеовог принцима имамо:

Предмети: Веб странице $m = 50$.

Кутије: парови чланова комисије $n = \binom{5}{2} = 10$.

Бар један пар чланова заједно прегледа 5 Веб страница јер је $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{49}{10} \right\rfloor + 1 = \lfloor 4{,}9 \rfloor + 1 = 5$.

б) Могуће је постићи тражени распоред:

Чланови комисије $\{a, b, c, d, e\}$.

Веб странице $\{1, 2, \ldots, 49, 50\}$.

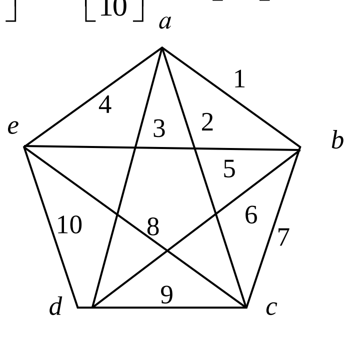
$a = \{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

$b = \{1, 5, .67, 11, 15, 16, 17, 21, 25, 26, 27, 31, 35, 36, 37, 41, 45, 46, 47\}$,

$c = \{2, 7, 8, 9, 12, 17, 18, 19, 22, 27.28, 29, 32, 37, 38, 39, 42, 47, 48, 49\}$

$d = \{3, 6, 9, 10, 13, 16, 19, 20, 23, 26, 29, 30, 33, 36, 39, 40, 43, 46, 49, 50\}$

$e = \{4, 5, 8, 10, 14, 15, 18, 20, 24, 25, 28, 30, 34, 35, 38, 40, 44, 45, 48, 50\}$



14. Свака тачка равни обојена је црвено или плаво. Доказати да у равни постоји правоугаоник чија су темена обојена истом бојом.
Решење:
Изаберемео три паралелне хоризонталне праве и повучемо на њих 9 нормалних вертикалних правих. Посматрамо њихове пресеке. Три пресека истом вертикалном правом могу бити обојена на $2^3 = 8$ начина. Према Дирихлеовом принципу постоје две вертикалне праве на којима су одговарајући пресеци обојена истом бојом. Бар два пресека на сваком од њих обојена су истом бојом, па смо добили једнакобојни правоугаоник.

15. Колико има делиоца броја 30^{30} који имају тачно 30 делиоца?
Решење:
$30^{30} = 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30}$. Делиоци су облика $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$ за $0 \le x_i \le 30,\ i = 1,2,3$. Делитеља има укупно 31^3. Тај делиоц $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$ делиоца. Према томе, уз замену $y_i = x_i + 1$, пребројавамо решења једначине $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Чиниоци су облика $y_i = 2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_i} \cdot 5^{\gamma_i}$, па је
$2^{\alpha_i+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_i+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_i+\gamma_2+\gamma_3} = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Односно, добија се систем
$\alpha_i + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \beta_i + \beta_2 + \beta_3 = 1, \gamma_i + \gamma_2 + \gamma_3 = 1, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \{0,1\}$.
Свака једначина очигледно има три решења. Укупан број решења је $3^3 = 27$. Дакле, 30^{30} има тачно 27 делиоца који од који сваки има по 30 делиоца.

16. На конференцији је учествовао одређен број математичара од који су се неки међусобно руковали. Докажите да је број математичара који су се руковали непарно много пута паран.
Решење:
Нека су $M_1, M_2, ...M_n$ математичари, а R релација руковања. $R = \{(M_i, M_j) \mid M_i\ se rukovaosa M_j\}$. Релација је симетрична па је број елемената релације $|R| = 2r$ паран. Означимо са x_i број математичара са којима се руковао M_i. Тада је $\sum_{i=1}^{n} x_i = |R| = 2r$.
Даље, нека је $P = \{i \in \{1,..n\} \mid x_i \ \ je\ paran\}$ они x_i који су парни и $N = \{i \in \{1,..n\} \mid x_i \ \ je\ neparan\}$ они x_i који су непарни. Важи $\sum_{i \in P} x_i + \sum_{i \in N} x_i = 2r$, па је $\sum_{i \in N} x_i = 2r - \sum_{i \in P} x_i$ паран број. Збир непарних бројева је паран број ако и само ако их има парно много. Дакле $|N|$ је паран број, што је требало доказати.

17. Нека су m и n природни бројеви. Одредите број ненегативних целобројних решења једначине $x_1 + x_2 + ... + x_m = n,\ x_i \in N_0^m$.
Решење:
$\binom{n+m-1}{m-1}$ начина начина, што је и одговор на питање као у претходном задатку.

18. У Болоњи се продају три врсте сендвича: са шунком, туном и вегетаријански. На колико начина студент може наручити 6 сендвича?
Решење
$\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{56}{2} = 28$, што је број целобројних решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

19. Дванаест девојака и пет момака желе да заузму 17 места у реду за биоскопске карте. Како би им био занимљивији провод, желе да стану тако да ниједан момак не стоји поред другог момка. На колико начина могу да се распореде?
Решење:
Нека прво 12 девојака стане у ред, оне то могу урадити на 12! начина. Сада, како желимо да задовољимо услов да ниједан момак не стоји поред другог, довољно је да први од момака заузме било које од 13 могућих места (тачно толико места има изме у 12 девојака + још места пре прве и после последње). Други момак има сад ”у понуди” 12 могућих места, трећи - 11, четврти - 10, пети - 9.

Таквим поступком смо попунили свих 17 места под траженим условом. И свега имамо $12! \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$.

20. У минском пољу налази се 25 мина, тако да за произвољне три од њих постоје 2 чије је растојање мање од 3 метра. Деминер може да деминира свако поље, осим поља у ком су мине толико концентрисане да постоји круг полупречника 3 метра у ком постоји бар 13 мина. Доказати да деминер није способан да очисти ово минско поље.

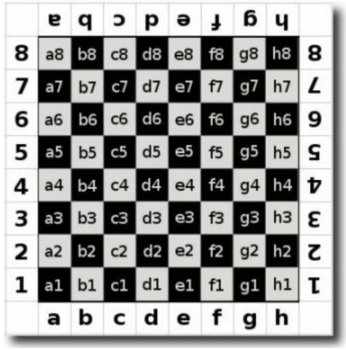
Решење:

Нека је A произвољна од датих мина и k_1 круг са центром A и полупрељником 3 m. Ако се све мине налазе унутар круга k_1, тврђење је доказано. У противном постоји мина B која није унутар круга k_1, тј. таква да растојање између мина A и B није мања од 3m. Нека је k_2 круг са центром B и полуречником 3m. Свака од датих 25 мина налази се унутар круга k_1 или унутар круга k_2. Заиста, ако би постојала мина C која није унутар ниједног од тих кругова, онда међу минама A, B, C не би постојале 2 мине чије је растојање мање од 3m, што је противно услову задатка. Сада на основу Дирихлеовог принципа добијамо да се унутар бар једног од кругова k_1 и k_2 налази бар 13 мина, па деминер заиста није способан да очисти ово минско поље.

21. Скакач је на шаховској табли на пољу A_1. Може ли скакач да обиђе сва поља тачно једном, а да се на крају нађе на пољу H_8?

Решење:

Пошто на свако поље може да стане тачно једном, потребно је 63 потеза. Приметимо да се после сваког потеза мења боја поља на коме се налази. Како је 63 непаран број, а A_1 црно поље (као што се може видети на слици), то скакач мора да заврши на белом пољу, али(!) H_8 је црно поље, дакле није могуће обићи таблу на тражени начин.



22. У посластичарници служе 5 различитих врста сладоледа: чоколада, ванила, лешник, вишња, јагода. На колико начина мали Бане може да одабере куп са три кугле (не обавезно различите)?

Решење:

Означимо са k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 број кугли сваке од врста редом. Колико има различитих решења једначине $k_1 + k_2 + .k_3 + k_4 + k_5 = 3$ заправо представља тражени број начина. По формули за број комбинација са понављањем добијамо да је решење:

$$\binom{5+3-1}{3} = 35.$$

Образложење: Ако 3 куглице и 4 преграде посматрамо као уређену седморку, онда скуп свих комбинација са понављањем одговара скупу решења једначине $k_1 + k_2 + .k_3 + k_4 + k_5 = 3$, где је k_1 представља број куглица пре прве преграде, k_2 број куглица између прве и друге заграде, .. k_5 број куглица после четврте заграде, а таквих комбинација има $\binom{5+3-1}{3}$.

23. Петоро деце треба да подели 15 једнаких колача међусобно тако да свако дете добије бар 2 колача. На колико начина је могуће извести поделу?

Решење:

Децу нумеришемо бројевима од 1 до 5. Означимо са c_i количину колача које добија дете са бројем i.

Тада се услови задатка записују са: $\sum_{k=1}^{5} c_i = 15,\ c_i \geq 2$. Ако уведемо смену $x_i = c_i - 2$ тада ће једначина бити: $\sum_{k=1}^{5} x_i = 15,\ x_i \geq 0$. Једначина $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ има ненегативних целобројних решења тачно $\binom{n+k-1}{n}$ (број комбинација са понављањем), што даје у нашем задатку $\binom{9}{5} = 126$.

24. Робот иде по координатној равни. На сваком кораку он може повећати апсцису за 1 или ординату за било који позитиван број. На колико начина можемо преместити робота из координатног почетк – тачка (0,0) у тачку (5,10)?

Решење:

Да би робот дошао у тачку (5, 10) робот треба да направи 5 корака по апсциси. Израчунајмо број начина кретања робота уз услов да је направио k корака на горе. Укупан број корака у том случају је $5+k$.

Кретање робота је једнозначно задато са (1) тих k корака из укупног броја $5+k$ који су усмерени на горе и (2) дужине корака на горе $y_1, y_{2,} \dots y_k$.

Број начина избора k корака на гореи од укупног броја $5+k$ једнако је броју $\binom{5+k}{k}$. Број начина избора дужине корака једнако је количини позитивних целобројних решења једначине:

$y_1 + y_2 + \dots + y_k = 10$. Једначину можемо трансформисати у облик: $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 10-k$, а број ненегативних целобројних решења је једнак $\binom{10-k+k-1}{10-k} = \binom{9}{10-k}$. Како број k је између 1 и 10.

Сабирајући за разне вредности k добијамо одговор $\sum_{k=1}^{k=10} \binom{5+k}{k}\binom{9}{10-k} = 236640$.

25. Робот иде по координатној равни. На сваком кораку он може повећати једну или обе координате за 1. На колико начина је могуће преместити робота из координатног почетка (0, 0) у тачку T(2, 2)?

Решење:

Означимо број начина премештања робота из тачке (0, 0) у тачку (a, b) са $T(a, b)$.

Правило збира даје рекурентну формулу: $T(a+1, b+1) = T(a+1, 0)+T(a, b)+T(a, b+1)$.

Јасно је да је $T(a, 0)=T(0, b)=1$.

Користећи ове везе добијамо:

$T(1, 1) = T(1, 0)+T(0, 0)+T(0, 1) = 3$,
$T(2, 1) = T(2, 0)+T(1, 0)+T(1, 1) = 5$,
$T(1, 2) = T(1, 1)+T(0, 1)+T(0, 2) = 5$,
$T(2, 2) = T(2, 1)+T(1, 1)+T(1, 2) = 13$